

Colle 2

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Attention ! Les notions de la partie APPLICATIONS ET RELATIONS ont été introduites mais ne seront pas l'objet spécifique d'exercices. Elles seront approfondies lors d'une colle ultérieure.

EXTRAIT DU PROGRAMME

1. RAISONNEMENT ET VOCABULAIRE ENSEMBLISTE

C. APPLICATIONS ET RELATIONS

Application d'un ensemble dans un ensemble.
Graphe d'une application.

Restriction et prolongement.
Injection, surjection.
Bijection, réciproque.

Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F .

Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.

Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .

Notation $f|_A$.

Notation f^{-1} .

2. COMPLÉMENTS DE CALCUL ALGÈBRE ET DE TRIGONOMÉTRIE

C. INÉGALITÉS DANS $\mathbb{R}$

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.
Intervalles de $\mathbb{R}$

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées.
Majorant, minorant ; maximum, minimum.
Partie entière d'un nombre réel.

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $|x - a| \leq b$

Notation $\lfloor x \rfloor$.

D. TRIGONOMÉTRIE

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$.
Cosinus et sinus des angles usuels.

Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.

Fonctions circulaires cosinus et sinus.

Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$.

Fonction tangente.

Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.

Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.

Notation $a \equiv b[\pi]$.

Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.

On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.

On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.

Notation $\tan$. Dérivée, variations, représentation graphique.

Interprétation sur le cercle trigonométrique.

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

3. TECHNIQUES FONDAMENTALES DE CALCUL EN ANALYSE

A. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x + a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.

Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.

La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

B. DÉRIVATION

Dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variation. Étude pratique d'une fonction.

Tracé du graphe.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Dérivées d'ordre supérieur.

Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

C. FONCTIONS USUELLES

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités $\exp(x) \geq 1 + x$, $\ln(1 + X) \leq x$.

Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.

Fonctions hyperboliques sh, ch, th.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}^*$.

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est : $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Appréhender une expression avec une valeur absolue
- Établir une inégalité
- Déterminer un domaine de définition, calculer une dérivée, étudier une branche infinie
- Déterminer l'expression d'une application réciproque
- Connaître et/ou savoir retrouver rapidement les formules de trigonométrie
- Manipuler les fonctions usuelles

QUESTIONS DE COURS

→ La valeur absolue : définition, inégalité triangulaire, $|x - a| \leq b$, exemples de manipulation d'expression (dérivée, intégrale, ...), caractérisation d'une fonction bornée.

→ Notions sur les fonctions : parité, imparité, périodicité, monotonie, majorant. Interprétation géométrique.

→ Règles sur les inégalités. Décrire les situations rencontrées en lien avec une inégalité sur les exemples de votre choix. Par exemple : encadrement de xy , encadrement de $x + x^2$, inégalité de fonctions $e^x \geq 1 + x$.

→ Graphe, dérivée, limites et propriétés des fonctions usuelles : $\ln$, $\exp$, $x \mapsto x^a$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, Arcsin , Arccos , ch , sh , th .

→ Fonctions cosinus et sinus : définition, valeurs particulières, lecture sur le cercle trigonométrique.

Exemple : valeur en $\frac{\pi}{2} \pm x$, équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, inéquation $\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$, ...

★ Établir $\cos^2 + \sin^2 = 1$, $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, $|\sin(x)| \leq |x|$, $e^x \geq 1 + x$ et $\ln(1 + x) \leq x$ (domaine à préciser).

★ Formules de dérivation. Traiter le cas d'une fonction réciproque : par exemple Arccos .

★ Définir $\mathcal{C}(I)$, $\mathcal{D}^1(I)$ et $\mathcal{C}^1(I)$. Donner une relation entre ses ensembles et montrer par un exemple que les inclusions sont strictes.

→ Préciser la notion de croissance comparée sur les fonctions puissances, logarithme et exponentielle et donner des exemples.

Rappeler les 6 *formes indéterminées* : dans chaque cas, donner deux exemples significatifs.

★ Soit m un paramètre réel. Résoudre : $\frac{x - m}{m - 2} > 3 - x$