

DS 1

Mercredi 16 septembre 2026 – durée : 2 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Les trois questions sont indépendantes.

1. a) En utilisant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes :

$$\alpha_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \qquad \alpha_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

- b) En utilisant f' , calculer :

$$\beta_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \qquad \beta_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$$

- c) Calculer de même : $\gamma = \sum_{k=0}^n (-1)^k k(k-1) \binom{n}{k}$

2. Simplifier les expressions :

$$a_n = \sum_{k=1}^n e^k - e^{k-1} \qquad b_n = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)^3}{k^2(k+1)}$$

3. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2

Les deux premières parties sont indépendantes.

Partie A

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} \text{ si } t > 0 \text{ et } g(0) = 1$$

1. a) Etablir que $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0)$. On dit que g est continue en 0.
b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. a) Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.
b) En donnant le tableau des variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\varphi : t \mapsto e^t - 1 - t$, prouver que pour tout t réel, $1 + t \leq e^t$.
c) En déduire le signe de g' et le sens des variations de g .
3. On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0.

Rappel

→ Une fonction f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

Le cas échéant, la limite est appelée nombre dérivée de f en x_0 , notée $f'(x_0)$.

A cet effet, on introduit la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$.

- a) Calculer h' et h'' , ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.
- b) Etablir que $0 \leq h''(t) \leq t$.
- c) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$ (★).
- d) Déduire de la relation (★) un encadrement de $\frac{1 - e^{-t} - t}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Prouver finalement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 1$$

4. a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) > 0$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) Prouver que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-2x}(2x + 1 - e^x(x + 1))$.
d) Utilisant la question A2b), montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) \leq 0$.
5. Vérifier que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2g(2x) - g(x)$, où g est la fonction définie dans la première partie.
En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
6. Construire la courbe représentative de f , le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'unité 4cm.

Partie C

On étudie maintenant la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(t) = \int_0^t f(x)dx$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale !

On rappelle que F , ainsi définie, est la primitive de f s'annulant en 0.

7. a) Étudier le sens de variation de F .

b) Établir que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.

En déduire que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq F(t) \leq 1$.

8. Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $G(t) = \int_0^t g(x)dx$.

a) En utilisant la relation de la question B.2), prouver que pour $t \geq 0$, $F(t) = G(2t) - G(t)$.

b) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $F(t) = \int_t^{2t} g(x)dx$.

c) Établir que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{x} - g(x) \leq e^{-x}$.

En déduire que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \ln(2) - F(t) \leq e^{-t}$.

d) Prouver finalement que $F(t)$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Exercice 3

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$$

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k .

b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$$

c) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=0}^n v_k^2$$

FIN DE L'ÉNONCÉ



Proposition de corrigé du devoir surveillé 1

Exercice 1

1. a) Soit f la fonction $x \mapsto (1+x)^n$. D'après la formule du binôme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Ainsi,

- Lorsque $x = 1$: $\alpha_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = f(1) = 2^n$

- Lorsque $x = -1$: $\alpha_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = f(-1) = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

b) f est une fonction polynomiale, donc dérivable, de dérivée :

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

Il vient :

- Lorsque $x = 1$: $\beta_1 = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = f'(1) = n2^{n-1}$ (relation vérifiée pour $n = 0$)

- Lorsque $x = -1$ et $n \geq 1$:

$$\beta_2 = \sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = -f'(-1) = -n0^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ -1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Et [lorsque $n = 0$, $\beta_2 = 0$.]

c) En dérivant une deuxième fois :

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$$

Lorsque $x = -1$ et $n \geq 2$:

$$\gamma = \sum_{k=2}^n (-1)^k k(k-1) \binom{n}{k} = f''(-1) = n(n-1)0^{n-2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 2 \\ 2 & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

Et [lorsque $n \leq 1$, $\gamma = 0$.]

2. Nous identifions une somme et un produit télescopiques :

$$a_n = \sum_{k=1}^n e^k - e^{k-1} = e^n - 1$$

$$b_n = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)^3}{k^2(k+1)} = \frac{2}{n^3(n+1)}$$

Détails de la télescopie :

$$\begin{array}{r} e^1 - e^0 \\ e^2 - e^1 \\ e^3 - e^2 \\ \vdots \\ e^{n-1} - e^{n-2} \\ + e^n - e^{n-1} \\ \hline a_n = e^n - e^0 \end{array}$$

$$b_n = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)^3}{k^2(k+1)} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)^3}{k^3} \frac{k}{k+1} = \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \right)^3 \prod_{k=2}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n^3} \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n^3(n+1)}$$

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

- Initialisation : Lorsque $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 (-1)^k k^2 = 0 \text{ et } (-1)^0 \frac{0(0+1)}{2} = 0$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

- Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 &= \underbrace{0^2 - 1^2 + 2^2 + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)^2}_{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k^2} + (-1)^n n^2 \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)n}{2} + (-1)^n n^2 \\ &= (-1)^n \frac{n}{2} [-(n-1) + 2n] = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2

Partie A

1. a) Cette limite est proche d'une limite usuelle : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Rappelons que cette limite est simplement l'écriture de la dérivabilité de la fonction $\exp$ en 0 :

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

De plus, $\lim_{t \rightarrow 0} -t = 0$. Par composition de limites on obtient quand $t \rightarrow 0$:

$$\frac{e^{-t} - 1}{-t} = \frac{1 - e^{-t}}{t} \rightarrow 1 = g(0)$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0)}$.

- b) La limite en $+\infty$ ne donne pas de forme indéterminée : $1 - e^{-t} \rightarrow 1 - 0 = 1$.

Ainsi, $\boxed{\lim_{+\infty} g = 0}$.

2. a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g'(t) = \frac{e^{-t}t - (1 - e^{-t})}{t^2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall t > 0, g'(t) = \frac{e^{-t}(t+1) - 1}{t^2}}$.

- b) La fonction $\varphi : t \mapsto e^t - 1 - t$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(t) = e^t - 1$.

On obtient le tableau suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(t)$	$-$	0	$+$
$\varphi(t)$		$\searrow 0 \nearrow$	
$\varphi(t)$	$+$	0	$+$

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t \leq e^t}$.

- c) Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, considérant que $e^{-t} > 0$:

$$e^t - 1 - t \geq 0 \Leftrightarrow e^{-t}(e^t - 1 - t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (1+t)e^{-t} \geq 0 \Leftrightarrow g'(t) \leq 0$$

Ainsi, $\boxed{g' \text{ est négative et } g \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

3. a) La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, h'(t) = -1 + t + e^{-t} \quad h''(t) = 1 - e^{-t} \quad h(0) = 0 \text{ et } h'(0) = 0}$$

- b) D'après A2b), on a que $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t \leq e^t$ et donc, pour tout $t \geq 0$, ($-t \in \mathbb{R}$)

$$1 - t \leq e^{-t} \Leftrightarrow 1 - e^{-t} = h''(t) \leq t$$

De plus $e^{-t} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - e^{-t}$. Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq h''(t) \leq t}$.

c) La fonction h'' est continue, les fonctions $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t$ aussi.

Le théorème de croissance de l'intégrale sur $[0, t]$ avec $t \geq 0$:

$$\int_0^t 0 dx \leq \int_0^t h''(x) dx \leq \int_0^t x dx \Leftrightarrow 0 \leq h'(t) - h'(0) \leq \frac{t^2}{2} - 0$$

Ainsi, $\forall t \geq 0, 0 \leq h'(t) \leq \frac{t^2}{2}$.

Appliquant à nouveau le théorème de croissance de l'intégrale sur $[0, t]$ avec $t \geq 0$:

$$\int_0^t 0 dx \leq \int_0^t h'(x) dx \leq \int_0^t \frac{x^2}{2} dx \Leftrightarrow 0 \leq h(t) - h(0) \leq \frac{t^3}{6} - 0$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \geq 0, 0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}}$.

d) Soit $t > 0$, d'après A3c)

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - t - e^{-t} + \frac{t^2}{2} \leq \frac{t^3}{6} &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2} + \frac{1}{2} \leq \frac{t}{6} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{t}{6} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ On pense à travailler sur $\mathbb{R}_+^*$ pour ne pas diviser par zéros

Ainsi, $\boxed{\forall t > 0, -\frac{1}{2} \leq \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{t}{6}}$

Considérons le taux de variation de g en 0 :

$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{\frac{1 - e^{-t}}{t} - 1}{t} = \frac{1 - t - e^{-t}}{t^2}$$

Nous venons d'établir un encadrement de cette expression.

Or $\lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \frac{t}{6} = -\frac{1}{2}$.

Le théorème des encadrements donne que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = -\frac{1}{2}}$.

Partie B

4. a) On a $f(0) = 1 \geq 0$. Pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) = \frac{e^{-x}}{x}(1 - e^{-x})$$

Les trois facteurs sont strictement positifs sur $\mathbb{R}_+^*$; ainsi, $\boxed{\forall x \geq 0, f(x) > 0}$.

b) La limite en $+\infty$ n'est pas une forme indéterminée : $\boxed{\lim_{+\infty} f = 0}$.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{(-e^{-x} + 2e^{-2x})x - (e^{-x} - e^{-2x})}{x^2} = \frac{(2x + 1)e^{-2x} - e^{-x}(x + 1)}{x^2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-2x}(2x + 1 - e^x(x + 1))}$.

d) D'après A2b) pour $x > 0$, on a : $1 + x \leq e^x$. En particulier $1 \leq e^x$ et donc $x \leq xe^x$. Par sommation des inégalités on obtient :

$$1 + x + x \leq e^x + xe^x \Leftrightarrow 1 + 2x \leq e^x(x + 1) \Leftrightarrow 1 + 2x - e^x(1 + x) \leq 0$$

De plus, $x > 0$ et $e^{-2x} > 0$ donc $f'(x) \leq 0$.

Ainsi, $\boxed{\forall x > 0, f'(x) \leq 0}$.

5. Soit $x > 0$,

$$2g(2x) - g(x) = 2 \frac{1 - e^{-2x}}{2x} - \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{1 - e^{-2x} - 1 + e^{-x}}{x} = f(x)$$

De plus, $2g(0) - g(0) = 2 - 1 = 1$ et $f(0) = 1$.

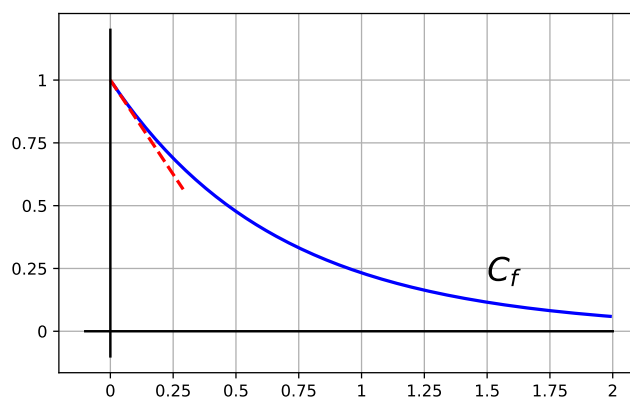
Ainsi, $\boxed{\forall x \geq 0, f(x) = 2g(2x) - g(x)}$.

Par composition et somme d'applications dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donc en 0.

En particulier, pour $x > 0$, $f'(x) = 4g'(2x) - g'(x) \rightarrow 4\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ avec $g'(0) = -\frac{1}{2}$ (3d).

Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{3}{2}}$.

6. La courbe de f :



Partie C

7. a) La fonction F est la primitive de f qui s'annule en 0 : $\forall x \geq 0, F'(x) = f(x)$.

D'après B4a) et $f(0) = 1$, on a $f > 0$. $\boxed{\text{La fonction } F \text{ est strictement croissante.}}$

b) Pour $x = 0$, $f(0) = 1$ et $e^0 = 1$, donc $0 \leq f(0) \leq e^{-0}$.

Soit $x > 0$, d'après B4a), $0 \leq f(x)$. De plus,

$$e^{-x} - f(x) = e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = \frac{e^{-x}}{x}(x - 1 + e^{-x})$$

D'après A2b), pour $t = -x$, $1 - x \leq e^{-x} \Rightarrow x - 1 + e^{-x} \geq 0$.

Enfin, $x > 0$ et $e^{-x} > 0$; donc, $e^{-x} - f(x) \geq 0$. Ainsi, $\boxed{\forall x \geq 0, 0 \leq f(x) \leq e^{-x}}$.

Soit $t \geq 0$. Les applications $x \mapsto 0$, $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues.

Le théorème de croissance de l'intégrale sur $[0, t]$ donne :

$$\int_0^t 0 dx \leq \int_0^t f(x) dx \leq \int_0^t e^{-x} dx \Leftrightarrow 0 \leq F(t) \leq 1 - e^{-t}$$

De plus, comme $e^{-t} > 0$, donc $1 - e^{-t} < 1$.

Ainsi, $\boxed{\forall t \geq 0, 0 \leq F(t) \leq 1}$.

8. a) La fonction G est la primitive de g qui s'annule en 0.

Ainsi, $t \mapsto G(2t) - G(t)$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto 2g(2t) - g(t)$.

D'après B5), on a donc pour tout $x \geq 0$: $F'(t) = f(t) = 2g(2t) - g(t) = (G(2t) - G(t))'$.

Ainsi, les deux fonctions ont la même dérivée, elle sont donc des primitives d'une même fonction et donc diffèrent d'une constante.

De plus, $F(0) = 0$ et $G(2 \times 0) - G(0) = 0$: elles sont égales en 0.

Ainsi, $\boxed{\forall t \geq 0, F(t) = G(2t) - G(t)}$.

Attention ! Il est important de noter que deux fonctions ayant la même dérivée diffèrent d'une constante. Il faut établir que cette constante est nulle pour montrer leur égalité.

b) Soit $t \geq 0$, comme G est une primitive de g , on a :

$$G(2t) - G(t) = [G(x)]_t^{2t} = \int_t^{2t} g(x) dx$$

Ainsi, d'après C8a), $\boxed{\forall t \geq 0, F(t) = \int_t^{2t} g(x) dx}$. $\Rightarrow$ On peut aussi utiliser Chasles.

c) Soit $x \geq 1$, $\frac{1}{x} - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ car $x \geq 1$. La positivité est évidente.

Ainsi, $\boxed{\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{1}{x} - g(x) \leq e^{-x}}$.

Soit $t \geq 1$, alors pour tout $x \in [t, 2t]$, $0 \leq \frac{1}{x} - g(x) \leq e^{-x}$.

Le théorème de croissance de l'intégrale donne :

$$\begin{aligned} \int_t^{2t} 0 dx &\leq \int_t^{2t} \frac{1}{x} - g(x) dx \leq \int_t^{2t} e^{-x} dx &\Leftrightarrow 0 &\leq [\ln(x) - G(x)]_t^{2t} \leq [-e^{-x}]_t^{2t} \\ &&\Leftrightarrow 0 &\leq \ln(2t) - G(2t) - \ln(t) + G(t) \leq -e^{-2t} + e^{-t} \\ &&\Leftrightarrow 0 &\leq \ln(2) - F(t) \leq e^{-t}(1 - e^{-t}) \leq e^{-t} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \geq 1, 0 \leq \ln(2) - F(t) \leq e^{-t}}$.

d) Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a $e^{-t} \rightarrow 0$.

Par encadrement, on obtient : $\ln(2) - F(t) \rightarrow 0$ c'est-à-dire $F(t) \rightarrow \ln(2)$.

Ainsi, $\boxed{\lim_{+\infty} F = \ln(2)}$.

Exercice 3

1. a) Montrons par réurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

• Initialisation : On a $u_0 = 0 \in [0, 1]$. La relation est vraie au rang 0.

• Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \in [0, 1]$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2}$ est dérivable et $f' : x \mapsto x$ est positive sur $[0, 1]$; ainsi, f est croissante sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

La relation est vraie au rang $n + 1$.

• Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$$

La suite (u_n) est croissante.

c) Comme la suite est croissante et majorée par 1, le théorème de limite monotone donne que la suite converge. Posons ℓ la limite.

Ainsi, $u_n \rightarrow \ell$ donc $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et par continuité de $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2}$, $f(u_n) \rightarrow \frac{\ell^2 + 1}{2}$.

Par unicité de la limite, ℓ est solution de :

$$x = \frac{x^2 + 1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

la suite (u_n) converge vers 1.

2. a) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k - v_{k+1} = 1 - u_k - 1 + \frac{u_k^2 + 1}{2} = \frac{u_k^2 - 2u_k + 1}{2} = \frac{(u_k - 1)^2}{2} = \frac{v_k^2}{2}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k - v_{k+1} = \frac{v_k^2}{2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on reconnaît une somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$.

Pour ceux qui n'identifient pas la somme télescopique, on peut toujours effectuer un changement d'indice après avoir séparé les termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} = \boxed{j = k + 1} \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{j=1}^n v_j = v_0 - v_n$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la somme :

$$\sum_{k=0}^n v_k^2 = \sum_{k=0}^n 2(v_k - v_{k+1}) = 2 \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = 2(v_0 - v_{n+1})$$

Or $u_n \rightarrow 1$ donc $v_n \rightarrow 0$ et $v_0 = 1 - 0 = 1$ donc $\boxed{\sum_{k=0}^n v_k^2 \rightarrow 2}$.