TP 8 - Dichotomie et autres exercices

Dichotomie

Prog

Situation : f une application continue sur le segment $[a,b]$ et telle que $f(a)f(b) \leq 0$.

Objectif : donner une valeur approchée d'une racine de f.

➜ Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une solution.

➜ Description de la méthode : on construit par récurrence, en utilisant le principe de dichotomie, deux suites adjacentes dont la limite commune est une racine de f. *L'idée est de découper l'intervalle d'étude en deux par le milieu et de considérer celui qui contient une racine pour réitérer le processus jusqu'à réduire la longueur de l'intervalle d'étude à la précision souhaitée.*

- Initialisation : $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f s'annule sur $I_n = [a_n, b_n]$, autrement dit, $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

Construction de I_{n+1} :

On pose $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ le milieu de I_n.

Si $f(a_n)f(c) \leq 0$ alors on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c \end{cases}$

Sinon on pose $\begin{cases} a_{n+1} = c \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

- Conclusion : Les suites (a_n), (b_n) sont adjacentes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

⇛ La fonction f s'annule sur tous les intervalles emboités $[a_n, b_n]$. Par continuité de f, la limite commune des deux suites, ℓ, est une racine de f.

Remarque : La longueur de I_n est $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Remarque : Pour toutes suites adjacentes (a_n) et (b_n) de limite ℓ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{a_n + b_n}{2} - \ell \right| \leq \frac{|b_n - a_n|}{2}$$

Exercice 1

1. Formaliser l'algorithme de la méthode de dichotomie :

Entrées : f une fonction,
a, b, p trois réels avec $a < b$

⋮

⋮

⋮

Sortie : r un réel appartenant à $[a,b]$
qui approxime une racine de f.

2. Écrire le script d'une fonction associée : `dicho(f,a,b,p)`.
3. Donner la valeur du point fixe de cos à 10^{-5} près.

Dichotomie dans une liste

Prog

Exercice 2 *Recherche d'un élément dans une liste d'entiers*

1. Écrire le script d'une fonction, `dans(x,L)` permettant de déterminer si un élément `x` est dans la liste `L`.
2. On suppose maintenant que la liste est triée, utiliser le principe de dichotomie afin de compléter la fonction `dicho(x,L)` determinant si un élément `x` est dans la liste `L`.

```python
def dicho(x,L):
    i,j=0,len(L)-1
    if x<L[i] or x>L[j]:
        return ...
    while j-i>0:
        c=...
        if L[c]<x:
            i=...
        else:
            j=...
    if ...:
        return True
    else:
        return False
```

Autres exercices

Exercice 3 Écrire une fonction `suite(n)`, qui retourne le terme de rang n de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0.5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1} + n} - u_{n+1} \end{cases}$$

Exercice 4 Considérons la fonction suivante :

```python
def f(L):
    LL=1*L
    while len(LL)>=2:
        if LL[0]<LL[1]:
            LL.pop(0)
        else:
            LL.pop(1)
    return LL[0]
```

1. Simuler la fonction suivante appliquée à la liste de nombre `L=[5,2,8,-2,4,4,0]` en remplissant le tableau suivant :

LL	len(LL)	LL[0]<LL[1]
⋮	⋮	⋮

2. Que fait la fonction ?

Lycée Saint-Exupery – maffre.saintexupery@gmail.com – MPSI