

DM 2

à rendre le mardi 29 septembre 2026

On considère les fonctions f et φ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \\ \varphi(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(2x)) \end{cases}$$

1. Identifier l'ensemble de définition de φ , sa parité et sa périodicité éventuelle.
2. Simplifier $\varphi(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ d'une part, et pour $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ d'autre part.
3. En déduire l'allure de la courbe représentative de φ .
4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |2x| \leq 1 + x^2$$

En déduire le domaine de définition de f .

5. Étudier la parité de f .
6. Lorsque $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, exprimer en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$:

$$\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$$

En déduire une expression simplifiée de $f(\tan(t))$.

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions φ et Arctan .
8. En déduire les variations de f sans calculer la dérivée.
9. Dresser le tableau de variations de f , préciser les limites éventuelles de f . Justifier que f présente un minimum et un maximum.
10. Montrer que f est dérivable sur les intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $]1, \infty[$.
11. Calculer $f'(x)$ pour $x \in] -\infty, -1[\cup] -1, 1[\cup]1, \infty[$. On prendra soin de vérifier la cohérence du résultat avec la question 8.
12. Étudier la dérivabilité de f en -1 et 1 et préciser l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage des points d'abscisses -1 et 1 .
13. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$, en précisant la tangente à l'origine.
14. Lorsque $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$, montrer que la droite d'équation $y = h$ rencontre $\mathcal{C}_f$ en deux points A et B dont on déterminera les abscisses.
15. Déterminer et construire la courbe décrite par le milieu I du segment $[AB]$ quand h varie.