

Corrigé du DM 2

1. Ensemble de définition de φ

$$\mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R}; 2x \in \mathcal{D}_{\sin} \text{ et } \sin(2x) \in \mathcal{D}_{\text{Arcsin}}\}$$

Nous savons que Arcsin est une fonction impaire, définie sur $[-1, 1]$; ainsi, $\varphi(x) = \text{Arcsin}(\sin(2x))$ est donc définie si et seulement si $\sin(2x) \in [-1, 1]$, ce qui est toujours vérifié.

La fonction sin étant impaire, φ est composée de fonctions impaires donc φ est impaire :

$$\varphi(-x) = \text{Arcsin}(\sin(-2x)) = \text{Arcsin}(-\sin(2x)) = -\text{Arcsin}(\sin(2x))$$

sin étant périodique de période 2π , alors $x \mapsto \sin(2x)$ est π -périodique :

$$\varphi(x + \pi) = \text{Arcsin}(\sin(2x + 2\pi)) = \text{Arcsin}(\sin(2x)) = \varphi(x)$$

Donc φ est périodique de période π .

Ainsi, φ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, périodique de période π .

2. Expression simplifiée de φ

Soit $\text{Arcsin}(x)$ est l'unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = x$.

a) Lorsque $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $2t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\sin(\theta) = \sin(2t)$ donne $\text{Arcsin}(\sin(2t)) = 2t$

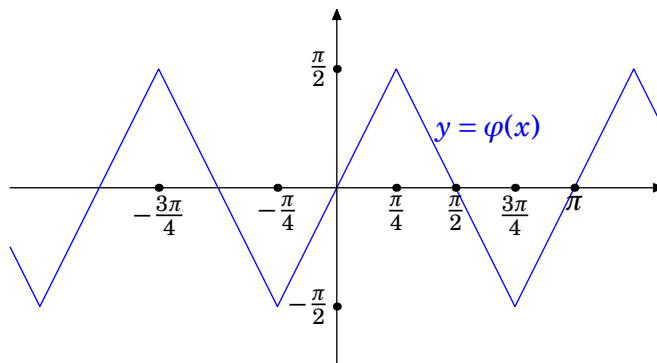
b) Lorsque $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, on a $2t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et donc $\sin(\theta) = \sin(2t) = \sin(\pi - 2t)$ avec $\pi - 2t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ce qui donne $\text{Arcsin}(\sin(2t)) = \pi - 2t$.

Ainsi, φ vérifie donc :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \pi - 2t & \text{si } t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

3. Allure de la courbe représentative de φ

On vient de définir l'expression de la courbe φ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Comme φ est impaire, on en déduit la courbe sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par symétrie par rapport à l'origine. De plus, φ est π -périodique, donc on déduit le reste de la courbe par translation de vecteur $\pi \vec{i}$.



4. Domaine de définition de f

$$\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{2x}{1+x^2} \in \mathcal{D}_{\text{Arcsin}} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1] \right\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1] &\Leftrightarrow \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |2x| \leq 1+x^2 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 \leq (1+x^2)^2 \quad t \mapsto \sqrt{t} \text{ est une bijection croissante de } \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x^2 + x^4 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x^2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, |2x| \leq 1+x^2$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

5. Parité de f

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$ et comme Arcsin est impaire,

$$f(-x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}\right) = \text{Arcsin}\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) = -\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$$

Ainsi, f est impaire.

6. Simplification de $\frac{2 \tan t}{1 + \tan^2 t}$ Soit $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{2 \sin(t)}{\cos(t)} \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} = \frac{2 \sin(t)}{\cos(t)} \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 2 \sin(t) \cos(t) = \sin(2t)$$

$$f(\tan(t)) = \text{Arcsin}\left(\frac{2 \tan t}{1 + \tan^2 t}\right) = \text{Arcsin}(\sin(2t)) = \varphi(t)$$

Ainsi, $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \sin(2t)$ et $f(\tan(t)) = \varphi(t)$.

7. Expression de f avec φ et Arctan

Par propriété de la bijection $\tan$ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R} : \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$x = \tan(t) \Leftrightarrow t = \text{Arctan}(x)$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \varphi(\text{Arctan}(x))$.

8. Variations de f

D'après 2) et 3), le tableau de variations de φ est :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(x)$	0		0		0
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			$-\frac{\pi}{2}$		

De plus, Arctan est impaire et croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{-\infty} \text{Arctan} = -\frac{\pi}{2}$ et $\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Ainsi, par composition de fonctions, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0		0		0
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			$-\frac{\pi}{2}$		

9. Extréma de f

D'après le tableau de variations, f présente un maximum en 1, égal à $\frac{\pi}{2}$, et un minimum en -1, égal à $-\frac{\pi}{2}$.

10. Dérivabilité de f

Arcsin étant dérivable sur $] -1, 1[$ ainsi, f est dérivable en tout x tel que $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \neq 1$

$$(2x = 1 + x^2 \Leftrightarrow x = 1) \quad \text{et} \quad (2x = -1 - x^2 \Leftrightarrow x = -1)$$

Ainsi, f est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

11. Calcul de f'

Méthode 1 : Considérons $f = \varphi \circ \text{Arctan}$: $f'(x) = \text{Arctan}'(x)\varphi'(\text{Arctan}(x))$

$$\varphi'(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\\ -2 & \text{si } t \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[\text{ ou } t \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(x) \in \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[& \text{si } x \in]-\infty, -1[\\]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[& \text{si } x \in]-1, 1[\\]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[& \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Ainsi,
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$$

Méthode 2 : Considérons $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$. Posons $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$:

$$u'(x) = \dots = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \quad f'(x) = \underbrace{\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}_{u'(x)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}}_{\text{Arcsin}'(u(x))}$$

On a $1-u^2(x) = \dots = \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$ et donc

$$\text{Arcsin}'(u(x)) = \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} & \text{si } 1-x^2 > 0 \\ -\frac{1+x^2}{1-x^2} & \text{si } 1-x^2 < 0 \end{cases}$$

Il vient, si $x \in]-1, 1[$ c'est-à-dire $1-x^2 > 0$, alors $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{2}{1+x^2}$

Si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$ c'est-à-dire $1-x^2 < 0$ alors $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$.

On retrouve l'expression précédente.

⇒ En particulier, $f'(x) > 0$ si $x \in]-1, 1[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$, ce qui est cohérent avec les variations de f obtenue à la question 8).

12. Dérivabilité en ± 1

f est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier $f(1) = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Considérons la limite de f' en 1^- et 1^+ :

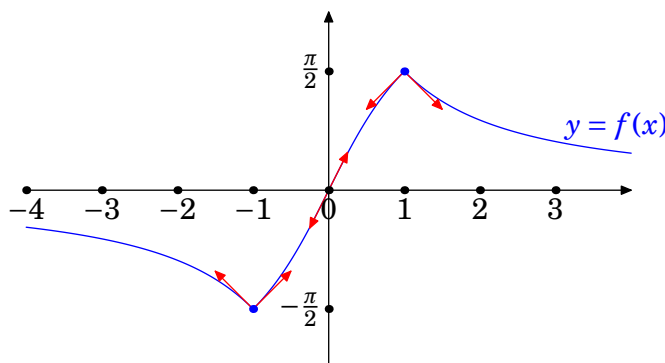
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} 1 \quad \text{et} \quad f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \xrightarrow[x > 1]{x \rightarrow 1} -1$$

donc f n'est pas dérivable en 1, mais on peut dire que f est dérivable à gauche ($f'_g(1) = 1$) et à droite ($f'_d(1) = -1$). $\mathcal{C}_f$ possède donc deux demi-tangentes en 1 : à gauche de 1, une demi-tangente d'équation $y = (x-1) + \frac{\pi}{2}$; à droite de 1, une demi-tangente d'équation $y = -(x-1) + \frac{\pi}{2}$.

Comme f est impaire, on a un résultat similaire en -1 .

13. Allure de $\mathcal{C}_f$

Notons que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$: $\mathcal{C}_f$ a en 0 une tangente d'équation $y = 2x$. L'allure de $\mathcal{C}_f$ est donc la suivante (avec des points anguleux en ± 1) :



14. **Antécédents de $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$** Considérons le tableau de variations de f et $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$

- Lorsque $x < 0$, $f(x) < 0$ donc l'équation d'inconnue $x : f(x) = h$ n'a pas de solution sur $] -\infty, 0[$.
- Sur $[0, 1]$, f est continue, strictement croissante, donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors h possède un unique antécédent par f sur $[0, 1]$ noté x_1 avec $\text{Arctan}(x_1) \in [0, \frac{\pi}{4}[$:

$$h = f(x_1) = \varphi(\text{Arctan}(x_1)) = 2\text{Arctan}(x_1) \Rightarrow x_1 = \tan\left(\frac{h}{2}\right)$$

- De façon analogue sur $[1, +\infty]$, il existe un unique x_2 tel que $h = f(x_2)$ avec $\text{Arctan}(x_2) \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$:

$$h = f(x_2) = \varphi(\text{Arctan}(x_2)) = \pi - 2\text{Arctan}(x_2) \Rightarrow x_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{h}{2}\right)}$$

Ainsi, lorsque $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$, la droite d'équation $y = h$ rencontre $\mathcal{C}_f$ en deux points A et B d'abscisses respectives :

$$x_1 = \tan\left(\frac{h}{2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \tan\left(\frac{\pi - h}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{h}{2}\right)}$$

15. **Lieu du milieu de $[AB]$** Le milieu I de $[AB]$ est le point d'abscisse $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et d'ordonnée $y = h$. On a donc :

$$x(h) = \frac{1}{2} \left[\tan\left(\frac{h}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi - h}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi - h}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi - h}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi - h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi - h}{2}\right)} \right) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi - h}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi - h}{2}\right)} = \frac{1}{\sin(h)}$$

La fonction $h \mapsto x(h)$ est dérivable, de dérivée : $x \mapsto -\frac{\cos(h)}{\sin^2(h)}$

On en déduit le tableau de variations de $h \mapsto x(h)$:

h	0	$\frac{\pi}{2}$
$x(h)$	$+\infty$	1
		$\searrow$

La courbe Γ décrite par le milieu I du segment $[AB]$, elle est décrite par $(x(h), y(h))$ pour $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $\lim_{x(h) \rightarrow +\infty} y(h) = 0$ alors Γ possède une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

De plus, $x'(h) \xrightarrow[h \rightarrow \frac{\pi}{2}]{h \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$ donc $\lim_{x(h) \rightarrow 1^+} (x'(h), y'(h)) = (0, 1)$.

La courbe Γ possède une tangente verticale au point $(1, \frac{\pi}{2})$.

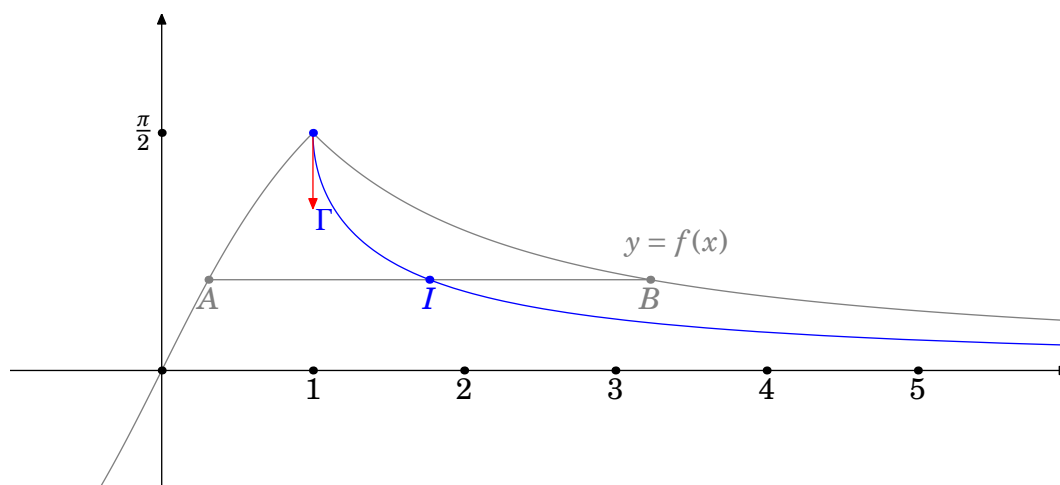


Figure 3. Lieu du milieu de $[AB]$