

Primitives et équations différentielles linéaires

I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Intégrales sur un segment

1.1 Primitive

Définition – Primitive

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I toute application $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I de fonction dérivée $F' = f$.

Exemples

- $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto x^2$ sont des primitives de $x \mapsto 2x$.
- $\sin$ est une primitive de $\cos$.

Proposition – Si F et G sont des primitives de f et g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I et λF une primitive de λf sur I .

Théorème – Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I ,
- il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + \alpha$.

[1] à compléter

Démonstration –

Corollaire – Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des primitives sur I . Alors pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

En particulier, pour tout $x_0 \in I$, il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en x_0 .

[2] à compléter

Démonstration –

Exercice : Donner l'expression type d'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

[3] à compléter

Solution –

Exercice : Déterminer les primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vérifiant $F(0) = 2$.

[4] à compléter

Solution –

Attention ! On définit une constante pour chaque intervalle du domaine de continuité.

Théorème – Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors f admet des primitives sur I .

Démonstration –

Admise osons $g : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ on a $g(a) = 0$. Il reste à établir que g est dérivable et $g' = f$. Soit $x_0 \in I$:

$$g(x) - g(x_0) = \int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt \text{ et } f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)dt$$

$$\text{Etudions } \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)dt \text{ (par linéarité)}$$

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right|$$

Or f est continue sur I : pour $\varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; |u - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(u) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Donc pour $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, $|t - x_0| \leq |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| \leq \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} \varepsilon \leq \varepsilon$.

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$; g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = f(x_0)$.

Conclusion : g est l'unique primitive de f s'annulant en a .

1.2 Intégrale

Définition – ■

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive (quelconque) de f .
Alors pour tous a et b éléments de l'intervalle I , on a :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

La différence $F(b) - F(a)$ est notée $[F(t)]_a^b$.

Exemple

Pour $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\ln(b) - \ln(a) = \int_a^b \frac{dt}{t}$.

Remarques –

1. La définition est indépendante du choix de la primitive utilisée.
2. Noter l'importance pour une primitive de la notion d'**intervalle** de définition.
3. Cette définition s'applique à une fonction continue sur un **segment** $[a, b]$.
4. Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue est donc ramené à la recherche d'une primitive.
5. Si f est dérivable et f' est continue sur I , on a pour tous a et b de I : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.

Corollaire – Soit f une fonction continue sur I . Pour tout $a \in I$, la fonction suivante

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f s'annulant en a .

[5] à compléter

Démonstration –

■

NOTATION – On note $\int_a^x f(t)dt$ une primitive générique de f .

Exercice : Soient f continue sur I et u et v dérivables sur J à valeurs dans I . Soit $G \in \mathbb{R}^J$ définie par :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

Montrer que G est dérivable sur J et calculer sa dérivée en fonction de u , u' , v , v' et f .

[6] à compléter

Solution –

■

Exercice : Déterminer g' sachant que $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin(-t)}{t} dt$, pour $x > 0$.

Attention ! Ceci n'est pas une primitive de $t \mapsto \frac{\sin(-t)}{t}$.

[7] à compléter

Solution –

■

Remarque – L'expression $\int_0^{2x} f(t)dt$ n'est pas une primitive de f : sa dérivée est $x \mapsto 2f(2x)$.

Une primitive de f s'écrit $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt + \alpha$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE L'intégrale de f est l'aire algébrique de la portion du plan comprise entre les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et le graphe de f : on compte positivement les portions au-dessus de l'axe des abscisses, et négativement celles qui sont en dessous.

1.3 Propriétés

Proposition – Extension au cas où $b \leq a$

Si $b < a$ et f continue sur $[b, a]$, on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Si $b = a$, on pose $\int_a^b f(t)dt = 0$.

Théorème – Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur I , $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

[8] à compléter

Démonstration –

Théorème – Relation de Chasles

Soient f continue sur I et $a, b, c \in I$ alors : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

[9] à compléter

Démonstration –

Théorème – Positivité et croissance

Soient f et g deux fonctions continues sur I et $a, b \in I$ avec $a \leq b$:

- si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$
- si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

[10] à compléter

Démonstration –

Attention ! $\forall x \in [0, 1], \sin(x) \leq x$ donc $\int_1^0 \sin(x) dx \geq \int_1^0 x dx$ car les bornes sont inversées !

Corollaire – Soit f continue sur I et $[a, b] \subset I$, alors :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

[11] à compléter

Démonstration –

Remarque – Si on ne suppose plus $a \leq b$, on pourra écrire :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)|dt \right|$$

2 Calcul des intégrales par primitivation

2.1 Primitives (quasi)-usuelles

Exemples

$$1. \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$2. x \mapsto 7x(7x^2+1)^3 = \frac{1}{8} 4 \times 14x(7x^2+1)^3 \text{ a pour primitive } x \mapsto \frac{(7x^2+1)^4}{8} + c \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

[12] à compléter

$f(x)$	$F(x)$	I	$f(x)$	$F(x)$
a			$\text{sh}(x)$	
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$			$\exp(\lambda x)$	
$x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$			$\frac{1}{\sqrt{x}}$	
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$			$\text{ch}(x)$	
$\frac{1}{x}$			$\frac{\sin(x) \cos(x)}{1+\cos^2(x)}$	
e^x			$\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$	
$\cos(x)$			$1 - \text{th}^2(x)$	
$\sin(x)$			$\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$	
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$			$\sin(x)^3 \cos(x)$	
$\tan(x)$			$g'(x)g(x)^\alpha$ ($\alpha \neq 1$)	
$\frac{1}{1+x^2}$			$h'(x)g'(h(x))$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$			$g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$	
$\frac{1+x}{(x^2+2x-1)^4}$			$\frac{g'(x)}{g(x)}$	

Attention ! Une méthode efficace est de mettre l'expression sous la forme $u'(t)f(u(t))$, une primitive étant $F(u(t))$.

Remarque – Certaines primitives de fonctions usuelles ne peuvent pas être exprimées avec des fonctions usuelles ; on conserve la notation $\int \ln |\sin t| dt$, $\int e^{-t^2} dt$.

[13] à compléter

Exercice :

f	F	f	F
$(8x-5)e^{4x^2-5x+2}$		$5 \sin(4t) - \tan(t)$	
$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}$		$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	
$e^x \sqrt[3]{e^x - 1}$		$\frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$	
$\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$		$\frac{3x+4}{5x-2}$	

[14] à compléter

Exercice : Montrer que

$$I = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad J = \int_0^2 e^{|t-1|} dt = 2(e-1) \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \sqrt{2}$$