

DS 2

Mercredi 30 septembre 2026 – durée : 2 h

Exercice 1 - Fonction hyperbolique

On rappelle que pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Formules d'addition

- a) Montrer que $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$.
- b) Déterminer les formules d'addition de $\operatorname{sh}(x+y)$, $\operatorname{ch}(x-y)$ et $\operatorname{th}(x+y)$.
2. En déduire les **formules de duplication** : $\operatorname{ch}(2x)$, $\operatorname{sh}(2x)$ et $\operatorname{th}(2x)$.
3. Notant $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$, exprimer $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$ en fonction de t .
4. Déterminer les formules de **transformation de produit en somme** : $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)$, $\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ et $\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$.
5. Soit $g : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \in \mathbb{R}^{[1, +\infty[}$.
 - a) pour $x \in \mathbb{R}_+$, simplifier $g(\operatorname{ch}(x))$.
 - b) pour $x \in \mathbb{R}_-$, simplifier $g(\operatorname{ch}(x))$.
6. Linéariser la fonction $f : x \mapsto \operatorname{ch}^3(x)\operatorname{sh}(2x)$ et en déduire une primitive de f .

Exercice 2 - Approximation de cos

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$$

1. Vérifier que f a une dérivée seconde et identifier le signe de f'' .
Quelle est la parité de f ? de f' ? Calculer $f'(0)$ et en déduire le tableau de variation de f puis le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\cos(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, \sqrt{2}]$, puis que $\sqrt{2} \leq \frac{\pi}{2}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = (4 - x^2) - (4 + x^2) \cos(x)$$

3. Vérifier que g a une dérivée troisième et identifier le signe de $g^{(3)}$ sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
Quelle est la parité de g ? de g' ? Calculer $g'(0)$, $g''(0)$ et en déduire le tableau de variation de g sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, puis le signe de g sur cet intervalle.
4. En déduire que, pour tout $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{2x^2}{4 + x^2}$$

Indication : On pourra remarquer que $\frac{4 - x^2}{4 + x^2} = 1 - \frac{2x^2}{4 + x^2}$

Quelle précision obtient-on pour encadrer $\cos(x)$?

Exercice 3

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln \left(\left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right)$$

Partie A - Fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

1. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité : $1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$.
2. Étudier la fonction th (dérivée, variations, limites, graphe).
3. a) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K à préciser.
On note Argth la bijection réciproque.
b) Justifier que Argth est dérivable sur K et déterminer sa dérivée.

Partie B - Étude de f

4. a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
b) Établir, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $f(x + \pi) = -f(x)$.
En déduire que f est périodique et donner une période de f .
c) On note I l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.
Expliquer comment obtenir le graphe de f sur $\mathcal{D}_f$ à partir de son graphe sur I .
5. a) Soit $\theta \in] -\pi; \pi[$. On pose $t = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Établir les relations :

$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- b) En déduire, pour tout $x \in I$: $f(x) = \ln \left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} \right)$.
6. a) Justifier que f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I, f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.
b) Dresser le tableau des variations de f sur I , en précisant les limites aux bornes.

Partie C - Étude de la fonction réciproque

7. Justifier que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
On note g la bijection réciproque.
8. Soit $x \in I$. Montrer que $\operatorname{ch}(f(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$. Exprimer de même $\operatorname{sh}(f(x))$ et $\operatorname{th}(f(x))$.
9. Montrer, pour tout $y \in J$: $g(y) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(y)) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(y))$.
10. En déduire que g est dérivable sur J et donner une expression simple de sa dérivée.

Proposition de corrigé du devoir surveillé 2

Exercice 1 - Fonction hyperbolique

1. Formules d'addition

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)} \quad (1).$

b) ➤ On s'inspire de la formule connue sur $\sin(x+y)$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)} \quad (2).$

Autre approche : obtenir la formule de $\operatorname{sh}(x+y)$ en dérivant celle de $\operatorname{ch}(x+y)$.

Pour $y \in \mathbb{R}$, on considère $\varphi : x \mapsto \operatorname{ch}(x+y)$. La dérivation (par rapport à x) donne :

$$\varphi'(x) = \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y))' = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$$

➤ Les fonctions ch et sh sont respectivement paire et impaire, il vient :

$$\boxed{\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)} \quad (3)$$

➤ La définition de th donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(x+y) &= \frac{\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)}{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) \left(\frac{\operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(y)} + \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)}{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) \left(1 + \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \frac{\operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(y)} \right)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}}.$

2. On déduit des formules précédentes, sachant que $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$:

$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2 = 1 + 2\operatorname{sh}(x)^2 = 2\operatorname{ch}(x)^2 - 1 \quad \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) \quad \operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}(x)^2}$
--

3. On note $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Sachant que $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(2x) &= \frac{\operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2}{1} = \frac{\operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)^2 \left(1 + \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)^2 \right)}{\operatorname{ch}(x)^2 \left(1 - \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)^2 \right)} = \frac{1 + \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)^2}{1 - \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)^2} \\ \operatorname{sh}(2x) &= \frac{2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) \frac{2\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}}{\operatorname{ch}(x)^2 \left(1 - \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)^2 \right)} = \frac{\frac{2\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}}{1 - \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \text{ et } \operatorname{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}}$

4. L'opération (1) + (3) donne : $\boxed{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))}$

L'opération (1) – (3) donne : $\boxed{\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))}$

Les fonctions ch et sh sont respectivement paire et impaire, il vient :

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) \quad (4)$$

Alors, l'opération (2) – (4) donne : $\boxed{\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y))}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x) \geq 1$ et donc

$$\begin{aligned} \ln(\operatorname{ch}(x) + \sqrt{\operatorname{ch}(x)^2 - 1}) &= \ln(\operatorname{ch}(x) + \sqrt{\operatorname{ch}(x)^2 - 1}) = \ln(\operatorname{ch}(x) + |\operatorname{sh}(x)|) \\ &= \ln(\operatorname{ch}(|x|) + \operatorname{sh}(|x|)) \text{ car } \operatorname{ch} \text{ est paire et } \operatorname{sh} \text{ est impaire} \\ &= \ln(\exp(|x|)) = |x| \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } x \in \mathbb{R}_+ \text{ alors } g(\operatorname{ch}(x)) = x \text{ et si } x \in \mathbb{R}_- \text{ alors } g(\operatorname{ch}(x)) = -x.}$

$$\begin{aligned} 6. \quad \operatorname{ch}^3(x)\operatorname{sh}(2x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{1}{16}(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x})(e^{2x} - e^{-2x}) \\ &= \frac{1}{16}(e^{5x} - e^x + 3e^{3x} - 3e^{-x} + 3e^x - 3e^{-3x} + e^{-x} - e^{-5x}) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{5x} - e^{-5x}}{2} + 3\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} + 2\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}(\operatorname{sh}(5x) + 3\operatorname{sh}(3x) + 2\operatorname{sh}(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{ch}^3(x)\operatorname{sh}(2x) = \frac{1}{8}(\operatorname{sh}(5x) + 3\operatorname{sh}(3x) + 2\operatorname{sh}(x)).}$

Une primitive de f est $\boxed{F : x \mapsto \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{ch}(5x)}{5} + \operatorname{ch}(3x) + 2\operatorname{ch}(x)\right).}$

Il vient :

$$\int_0^1 f(t)dt = F(1) - F(0) = \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{ch}(5)}{5} + \operatorname{ch}(3) + 2\operatorname{ch}(1)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5} + 1 + 2\right)$$

Ainsi, $\boxed{\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{ch}(5)}{5} + \operatorname{ch}(3) + 2\operatorname{ch}(1)\right) - \frac{2}{5}.}$

Exercice 2

1. Étude de f

f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable une infinité de fois car obtenue comme somme de fonctions dérivables une infinité de fois, de dérivées successives :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -\sin(x) + x \\ f''(x) &= -\cos(x) + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

f est une fonction paire, f' une fonction impaire.

$f'' \geq 0$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(0) = 0$, nous pouvons en déduire le tableau de variation de f puis le signe de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f'(x)$		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
$f(x)$		0	
$f(x)$	$+$	0	$+$

2. Une inégalité pour cos

D'après le tableau de variation précédent, nous pouvons en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0 &\Rightarrow \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} \\ &\Rightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} (2 - x^2) \end{aligned}$$

Lorsque $x \in]0, \sqrt{2}]$, $x^2 \leq 2$ donc $2 - x^2 \geq 0$ et nous pouvons conclure :

$$\boxed{\forall x \in]0, \sqrt{2}], \quad \cos(x) \geq 0}$$

Comme $\frac{\pi}{2}$ est le plus petit réel positif x tel que $\cos(x) = 0$, alors un raisonnement par l'absurde

donne : $\boxed{\sqrt{2} \leq \frac{\pi}{2}}$

3. Étude de g

g est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable une infinité de fois car obtenue comme somme et produit de fonctions dérivables une infinité de fois, de dérivées successives :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x - 2x \cos(x) + (4 + x^2) \sin(x) \\ g''(x) &= -2 \underbrace{-2 \cos(x) + 2x \sin(x)}_{D(-2x \cos(x))} + \underbrace{2x \sin(x) + (4 + x^2) \cos(x)}_{D((4+x^2) \sin(x))} \end{aligned}$$

En regroupant les termes :

$$g''(x) = -2 + (2 + x^2) \cos(x) + 4x \sin(x)$$

Dérivons à nouveau :

$$g^{(3)}(x) = \underbrace{2x \cos(x) - (2 + x^2) \sin(x)}_{D[(2+x^2) \cos(x)]} + \underbrace{4 \sin(x) + 4x \cos(x)}_{D[4x \sin(x)]}$$

En regroupant les termes :

$$g^{(3)}(x) = 6x \cos(x) + (2 - x^2) \sin(x)$$

Notons que $g(0) = g'(0) = g''(0) = g^{(3)}(0) = 0$.

Notons que g est une fonction paire, g' une fonction impaire, g'' une fonction paire et $g^{(3)}$ une fonction impaire.

Pour identifier le signe de $g^{(3)}(x)$, il suffit de le faire lorsque $x \geq 0$, $g(-x)$ étant du signe opposé.

$$g^{(3)}(x) = 6x \cos(x) + (2 - x^2) \sin(x)$$

Lorsque $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, comme $\sqrt{2} \leq \frac{\pi}{2}$ nous savons que $\cos(x) \geq 0$, $\sin(x) \geq 0$. De plus $x^2 \leq 2$ donc $2 - x^2 \geq 0$: nous en déduisons que $g^{(3)}(x) \geq 0$.

Nous pouvons en déduire le tableau de variation de g puis le signe de g sur $[0, \sqrt{2}]$:

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
$g^{(3)}(x)$		0	+
$g''(x)$		0	$\nearrow$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$		0	$\nearrow$
$g(x)$		0	+
$g(x)$		$\searrow$	0 $\nearrow$
$g(x)$		+	0

4. Un encadrement de cos

Nous avons donc démontré que, pour tout $x \in [0, \sqrt{2}]$:

$$\begin{aligned} (4 - x^2) - (4 + x^2) \cos(x) \geq 0 &\Rightarrow (4 - x^2) \geq (4 + x^2) \cos(x) \\ &\Rightarrow \frac{4 - x^2}{4 + x^2} \geq \cos(x) \\ &\Rightarrow 1 - \frac{2x^2}{4 + x^2} \geq \cos(x) \end{aligned}$$

De même, nous avons démontré que : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$

Ainsi, la fonction cos étant paire, ainsi que les deux autres fonctions impliquées dans les inégalités, nous en déduisons que

$$\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{2x^2}{4 + x^2}$$

Nous obtenons un encadrement de $\cos(x)$ de précision $\epsilon(x)$ définie par :

$$\epsilon(x) = \frac{4 - x^2}{4 + x^2} - \frac{2 - x^2}{2} = \frac{1}{2(4 + x^2)} (2(4 - x^2) - (2 - x^2)(4 + x^2)) = \frac{x^4}{2(4 + x^2)} \leq \frac{x^4}{8}$$

Nous obtenons un encadrement de $\cos(x)$ de précision $\epsilon(x)$:

$$\epsilon(x) = \frac{x^4}{2(4 + x^2)} \leq \frac{x^4}{8}$$

Lorsque $|x| \leq 0.1$, on obtient ainsi une valeur approchée de $\cos(x)$ avec une précision de près de 5 décimales.

Remarque :

Le polynôme $P : t \mapsto 1 - \frac{t^2}{2}$ est le *polynôme de Taylor* d'ordre 2 pour la fonction cos, la fraction rationnelle $F : t \mapsto \frac{4-t^2}{4+t^2}$ est l'*approximant de Padé* d'ordre (2,2) pour la fonction cos.

Le *polynôme de Taylor* d'ordre n pour une fonction f est l'unique polynôme de degré au plus n qui coïncide (ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n) avec la fonction f en 0 ; l'*approximant de Padé* d'ordre (n, p) pour une fonction f est l'unique fraction rationnelle $\frac{N}{D}$ où le numérateur N est un polynôme de degré au plus n , le dénominateur D un polynôme de degré au plus p qui coïncide (ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n + p$) avec la fonction f en 0.

Comme nous l'avons démontré dans cet exercice, les polynômes de Taylor et les approximants de Padé de $\cos$ donnent une bonne approximation de la fonction $\cos$.

Programme de MPSI

Les *polynômes de Taylor*¹ sont au programme de MPSI : nous aurons l'occasion d'énoncer et de démontrer différentes formules impliquant ces polynômes (formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange).

Les *approximants de Padé*² ne sont pas inscrits au programme de la prépa.

Exercice 3

Partie A - Fonction tangente hyperbolique

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - \text{th}^2(x) = 1 - \frac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}}.$

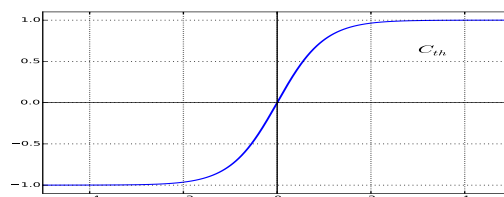
2. On a $\text{ch} > 0$ donc th est définie sur $\mathbb{R}$; de plus, sh et ch sont dérivables alors, par quotient, th est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \frac{\text{sh}'(x)\text{ch}(x) - \text{ch}'(x)\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$.

Donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{th}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

De plus, th est impaire, donc $\text{th}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$.



3. a) La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } f(\mathbb{R}) =]-1, 1[}.$

b) Comme th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\text{th}' > 0$, alors Argth est dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$\text{pour } y \in] -1, 1[, \quad \text{Argth}'(y) = \frac{1}{\text{th}'(\text{Argth}(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{Argth}(y))} = \frac{1}{1 - y^2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Argth est dérivable sur }] -1, 1[\text{ et } \text{Argth}' : t \mapsto \frac{1}{1 - t^2}}.$

1. La première mention des *polynômes de Taylor* remonte à un courrier du mathématicien anglais Brook Taylor (1685–1731) à John Machin (1680–1751) en 1712. Il développe cette théorie dans le livre *Methodus incrementorum directa et inversa* publié en 1715

2. Les *approximants de Padé* sont définis dans la thèse soutenue en 1892 par le mathématicien français Henri Padé (1863–1953).

Partie B - Étude de f

4. a) $\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \mathcal{D}_{\tan} \text{ et } \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \right\}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \mathcal{D}_{\tan} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{3\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}}$

b) Soit $x \in \mathcal{D}_f$, alors $x + \pi \in \mathcal{D}_f$ et

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \ln \left(\left| \tan \left(\frac{x + \pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) = \ln \left(\left| \frac{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right| \right) = \ln \left(\left| \frac{\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{-\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right| \right) \\ &= \ln \left(\left| \frac{1}{\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right| \right) = -\ln \left(\left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x + \pi) = -f(x)}.$

Soit $s \in \mathcal{D}_f$, alors $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$, $f(x + 2\pi) = -f(x + \pi) = (-1)^2 f(x) = f(x)$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$

c) On déduit la courbe sur $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ de celle sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ en faisant une symétrie par rapport à l'axe (Ox) et une translation de vecteur $\pi \vec{i}$.

Enfin, la 2π -périodicité de f permet de construire la courbe de f sur $\mathcal{D}_f$ par translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5. a) Soit $\theta \in] -\pi; \pi[$ et donc $\frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ avec $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$; alors

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}}{1 + \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}} = \frac{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2})} = \sin(\theta)$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}}{1 + \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}} = \frac{\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2})} = \cos(\theta)$$

Ainsi, $\boxed{\forall \theta \in] -\pi; \pi[, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}}.$

b) Soit $x \in I$ et $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \in]-1, 1[$, alors

$$\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} + \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t + 1 + t^2}{1 - t^2} = \frac{(1+t)^2}{(1-t)(1+t)} = \frac{1+t}{1-t}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{t+1}{1-t}$$

De plus, comme $x \in I$, alors $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in I, f(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right)}$.

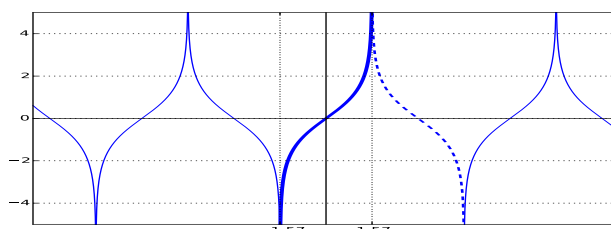
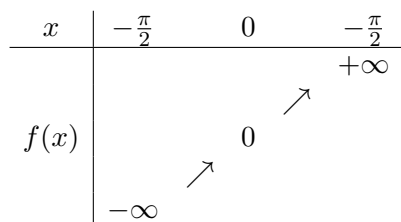
6. a) La fonction $x \mapsto \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}$ strictement positive (d'après ci-avant) et dérivable sur I . Or $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f est dérivable sur I . Soit $x \in I$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}} = \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)(1 + \sin(x))} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in I, f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}}$.

b) Sur I , $\cos > 0$ donc f est strictement croissante. Recherchons les limites aux bornes de I :

- $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\pi}{2}^-$, $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$, alors par composition, $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} f = +\infty$.
- $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} 0^+$, $\lim_{0^+} \tan = 0^+$ et $\lim_{0^+} \ln = -\infty$, alors par composition, $\lim_{-\frac{\pi}{2}^+} f = 0$.



Partie C - Étude de la fonction réciproque

7. La fonction f est continue et strictement croissante sur I donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $f(I) = \mathbb{R}$.

8. Soit $x \in I$,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{ch}(f(x)) &= \frac{1}{2} (e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = \frac{1}{2} \left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 1} \right) = \frac{1}{2} \frac{(\sin(x) + 1)^2 + \cos^2(x)}{\cos(x)(\sin(x) + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2(x) + 1 + 2\sin(x) + \cos^2(x)}{\cos(x)(\sin(x) + 1)} = \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)(\sin(x) + 1)} = \frac{1}{\cos(x)} \\ \bullet \quad \text{sh}(f(x)) &= \frac{1}{2} (e^{f(x)} - e^{-f(x)}) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(x) + 1 + 2\sin(x) - \cos^2(x)}{\cos(x)(\sin(x) + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2(x) + 1 + 2\sin(x) - 1 + \sin^2(x)}{\cos(x)(\sin(x) + 1)} = \frac{1}{2} \frac{2\sin(x)(\sin(x) + 1)}{\cos(x)(\sin(x) + 1)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \end{aligned}$$

$$\bullet \operatorname{th}(f(x)) = \frac{\operatorname{sh}(f(x))}{\operatorname{ch}(f(x))} = \frac{\tan(x)}{\frac{1}{\cos(x)}} = \sin(x)$$

Ainsi, $\forall x \in I, \operatorname{ch}(f(x)) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \operatorname{sh}(f(x)) = \tan(x) \text{ et } \operatorname{th}(f(x)) = \sin(x).$

9. Soit $y \in J = \mathbb{R}$, on pose $x = g(y) \in I$

$$\operatorname{th}(y) = \operatorname{th}(f(x)) = \sin(x) = \sin(g(y)) \text{ donc } \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(y)) = g(y)$$

$$\operatorname{sh}(y) = \operatorname{sh}(f(x)) = \tan(x) = \tan(g(y)) \text{ donc } \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(y)) = g(y)$$

Ainsi, $\text{pour tout } y \in J : g(y) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(y)) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(y)).$

10. f est dérivable et $f' > 0$ donc g est dérivable sur J .

Autre approche : la fonction sh et Arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc, par composition g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\text{pour } y \in J, \text{ alors } g'(y) = \operatorname{sh}'(y) \operatorname{Arctan}'(\operatorname{sh}(y)) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}.$