

Corrigé du DM 3

Equations complexes

1. Équation de cercle

Soient M et Ω deux points d'affixe z et ω .

$$\Omega M^2 = |z - \omega|^2 = (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = z\bar{z} - \omega\bar{z} - z\bar{\omega} + \omega\bar{\omega}$$

Ainsi, le point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ appartient au cercle de centre C d'affixe $c \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $CM^2 = r^2$, c'est à dire si et seulement si z vérifie :

$$z\bar{z} - c\bar{z} - z\bar{c} + c\bar{c} = r^2$$

2. Équation de cercle (suite)

Soit M un point d'affixe z , et C d'affixe c alors $MC^2 = z\bar{z} - c\bar{z} - z\bar{c} + c\bar{c}$ et

$$z\bar{z} - c\bar{z} - z\bar{c} = d \quad \Leftrightarrow \quad MC^2 = d + |c|^2$$

Ainsi, d'après la première question, il vient :

- lorsque $d + |c|^2 < 0$, l'équation d'inconnue z n'a pas de solution ;
- lorsque $d + |c|^2 = 0$, l'équation d'inconnue z admet une unique solution : le point C ;
- lorsque $d + |c|^2 > 0$, l'équation d'inconnue z est celle du cercle de centre C et de rayon $\sqrt{d + |c|^2}$.

3. Ensemble des points vérifiant $AM = kBM$

Soit Γ l'ensemble des points d'affixes z vérifiant : $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k$ M appartient à Γ si et seulement si, successivement :

$$\begin{aligned} |z-a|^2 &= k^2 |z-b|^2 \\ z\bar{z} - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a} &= k^2 [z\bar{z} - b\bar{z} - z\bar{b} + b\bar{b}] \\ (1-k^2)z\bar{z} - (a-k^2b)\bar{z} - z(\bar{a}-k^2\bar{b}) &= k^2b\bar{b} - a\bar{a} \end{aligned}$$

Lorsque $k \neq 1$, en divisant par $1-k^2$, si on pose $c = \frac{a-k^2b}{1-k^2}$ et $d = \frac{k^2b\bar{b} - a\bar{a}}{1-k^2}$:

$$z\bar{z} - c\bar{z} - z\bar{c} = d$$

Ainsi, lorsque $k = 1$, $AM = BM$ si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, qui est une droite.

Lorsque $k \neq 1$, d'après la question précédente, Γ est soit vide, soit un point soit un cercle.

4. Cas où $k \neq 1$

Lorsque $k \neq 1$ et $d + |c|^2 > 0$ alors Γ est cercle de centre C d'affixe $c = \frac{a-k^2b}{1-k^2}$ et de rayon r tel que :

$$r^2 = |c|^2 + d = \frac{a-k^2b}{1-k^2} \frac{\bar{a}-k^2\bar{b}}{1-k^2} + \frac{k^2b\bar{b} - a\bar{a}}{1-k^2} = \dots = \frac{k^2AB^2}{(1-k^2)^2} > 0$$

On note que si $k \neq 1$ alors $|c|^2 + d > 0$ et Γ est un cercle !

5. Les solutions de $(\mathcal{E})$ se trouvent sur un cercle ou une droite

Soit M un point d'affixe z , solution de $(\mathcal{E}) : (z - a)^n = c(z - b)^n$

Notons que $z = b$ n'est pas solution de $(\mathcal{E})$ car $a \neq b$. Nous pouvons diviser par $(z - b)^n \neq 0$:

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \left(\frac{z - a}{z - b} \right)^n = c \Rightarrow \left| \frac{z - a}{z - b} \right|^n = |c| \Rightarrow \left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \sqrt[n]{|c|}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

➤ lorsque $|c| = 1$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont sur la médiatrice de $[AB]$,

➤ lorsque $|c| \neq 1$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont sur le cercle de centre.

6. Solutions de $(\mathcal{E})$

a) **Résolution de l'équation** Avec les notations $c = \exp(i\gamma)$ et $a = \bar{b} = \rho \exp(i\alpha)$ avec $\gamma, \alpha, \rho \in \mathbb{R}$, l'équation $(\mathcal{E})$ de vient :

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \left(\frac{z - \rho \exp(i\alpha)}{z - \rho \exp(-i\alpha)} \right)^n = \exp(i\gamma)$$

Le théorème sur les racines n -ième donne, en notant $2\beta_k = \frac{\gamma}{n} + \frac{2k\pi}{n}$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket; \frac{z - \rho \exp(i\alpha)}{z - \rho \exp(-i\alpha)} = \exp(2i\beta_k) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket; z - \rho \exp(i\alpha) = \exp(2i\beta_k)(z - \rho \exp(-i\alpha)) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket; z(1 - \exp(2i\beta_k)) = \rho(\exp(i\alpha) - \exp(i(2\beta_k - \alpha))) \end{aligned}$$

En multipliant par $\exp(-i\beta_k)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket; z(\exp(-i\beta_k) - \exp(i\beta_k)) = \rho(\exp(i(\alpha - \beta_k)) - \exp(i(\beta_k - \alpha))) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket; z2i \sin(-\beta_k) = \rho 2i \sin(\alpha - \beta_k) \end{aligned}$$

Donc, lorsque $\sin(\beta_k) \neq 0$: $z = \frac{\sin(\beta_k - \alpha)}{\sin(\beta_k)}$.

De plus, on sait que $a \neq b$ donc $a, b \notin \mathbb{R}$ et $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Il vient que si $\sin(\beta_k) = 0$, alors l'équation $(\mathcal{E})$ n'a pas de solution.

Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc de la forme :

$$z = -\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } \frac{\gamma}{2} + \frac{2k\pi}{n} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

b) Les solutions sont réelles

Les solutions ci-dessus sont réelles ; ce qui est cohérent avec le résultat de la question 5, si $|c| = 1$ alors les solutions sont sur la médiatrice de $[AB]$, deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses (car $a = \bar{b}$).

7. Module et argument de : $1 + i \tan(\alpha)$

$$1 + i \tan(\alpha) = 1 + \frac{i \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)} \exp(i\alpha)$$

De plus, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(\alpha) > 0$. De plus, $\tan$ est impaire :

$$\frac{1 + i \tan(\alpha)}{1 - i \tan(\alpha)} = \frac{1 + i \tan(\alpha)}{1 + i \tan(-\alpha)} = \frac{\frac{1}{\cos(\alpha)} \exp(i\alpha)}{\frac{1}{\cos(-\alpha)} \exp(-i\alpha)} = \exp(2i\alpha)$$

Ainsi, $\boxed{1 + i \tan(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \exp(i\alpha) \text{ et } \frac{1 + i \tan(\alpha)}{1 - i \tan(\alpha)} = \exp(2i\alpha).}$

8. Les solutions de $(\mathcal{F})$ sont réelles.

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (\mathcal{F}) &\Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^n = \frac{1+i \tan(\alpha)}{1-i \tan(\alpha)} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{i(-i+z)}{i(-i-z)} \right)^n = \exp(2i\alpha) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n = (-1)^n \exp(2i\alpha)
\end{aligned}$$

On se ramène à l'équation $(\mathcal{E})$, en posant $a = i$, $b = -i$ et $c = (-1)^n \exp(2i\alpha)$.

Comme $|c| = 1$ alors les solutions de $(\mathcal{F})$ sont réelles.

9. Équation résolvante

Comme z est réel et que Arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors la changement $t = \text{Arctan}(z)$ est valide et donc le changement $z = \tan(t)$ aussi.

$$\begin{aligned}
z = \tan(t) \text{ est solution de } (\mathcal{F}) &\Leftrightarrow \left(\frac{1+i \tan(t)}{1-i \tan(t)} \right)^n = \frac{1+i \tan(\alpha)}{1-i \tan(\alpha)} \\
&\Leftrightarrow \exp(2it)^n = \exp(2i\alpha) \text{ d'après la question 7) } \\
&\Leftrightarrow \exp(2int) = \exp(2i\alpha) \text{ d'après Moivre}
\end{aligned}$$

Ainsi, z est solution de $(\mathcal{F})$ si et seulement si t est solution de $(\mathcal{F}') : \exp(2int) = \exp(2i\alpha)$.

10. Solutions de $(\mathcal{F})$

On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $2nt = 2\alpha + 2k\pi$

$$t = \frac{1}{n}(\alpha + k\pi) \Leftrightarrow z = z_k = \tan\left(\frac{1}{n}(\alpha + k\pi)\right)$$

La fonction $\tan$ étant périodique de période π , alors pour tout $j \in \mathbb{N} : z_{k+jn} = z_k$

Il y a donc au plus n valeurs différentes de z_k pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Ainsi, z est solution de $(\mathcal{F})$ si et seulement s'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que : $z = \tan\left(\frac{1}{n}(\alpha + k\pi)\right)$.