

Colle 5

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

EXTRAIT DU PROGRAMME

1. TECHNIQUES FONDAMENTALES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

B. PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A. CALCUL DE PRIMITIVES

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f , $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ a pour dérivée f .

On pourra noter $\int^x f(t)dt$ une primitive générique de f .

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

Primitives de $x \mapsto \exp(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \exp(ax) \cos(bx)$ et $x \mapsto \exp(ax) \sin(bx)$.

Primitives des fonctions exponentielles, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques et des fonctions

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Intégration par parties, changement de variable.

et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Mettre en oeuvre une IPP, un changement de variable
- Manipuler une intégrale dépendant de ses bornes
- Calcul de primitives de fonction quasi-usuelles : $u'f(u)$, $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$, $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$
- Primitivation de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$

QUESTIONS DE COURS

- Primitive, existence, unicité, intégrale, dérivée d'une intégrale dépendant de ses bornes
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, Chasles, positivité et son corollaire
- Primitive de fonctions usuelles
- Primitivation de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$: décrire la démarche générale ou traiter un exemple pour chacune des trois situations. Primitive de $x \mapsto \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$
- ★ Primitivation de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$. Traiter le cas $x \mapsto e^{-2x} \sin(3x)$
- ★ Intégration par parties. Calcul de $\int_1^e \ln(t)^2 dt$.
- ★ Changement de variable. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(u)}{1 + \cos(u)} du$ en posant $v = \cos(u)$.