

DM 4

à rendre le mardi 3 novembre 2026

Étude d'une équations d'ordre 1

1. Résolution d'une équation différentielle linéaire :

$$(\mathcal{E}) \quad ty' + y + \sin(t) = 0$$

- a) Donner la forme normalisée de l'équation ainsi que les intervalles d'études.
- b) Résoudre l'équation homogène.
- c) Utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer une solution particulière de $(\mathcal{E})$
- d) Donner la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$.
- e) Étudier les raccordements possibles afin de définir un solution définie sur $\mathbb{R}$: commencer par trouver la ou les solutions continues sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle sont dérivables.

Indication : On pourra utiliser le fait que $\cos(t) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

2. Résolution d'une équation différentielle non linéaire :

$$(\mathcal{F}) \quad \forall t \in]0, +\infty[, \quad ty' = y + \sin(t)y^2$$

- a) Considérant une solution y de $(\mathcal{F})$, sur un intervalle où y ne s'annule pas, identifier l'équation vérifiée par $z = \frac{1}{y}$.
- b) Réciproquement, montre que si z est une solution de $(\mathcal{E})$ ne s'annulant pas, alors y est une solution de $(\mathcal{F})$.
- c) Donner l'intervalle de définition des solutions trouvées.

3. Montrer que les solutions de l'équation différentielle :

$$ty' = y + \sin(t)y^2$$

qui sont définies sur $]0, +\infty[$ se prolongent en des solutions sur $\mathbb{R}$.