

DS 3

Mercredi 14 octobre 2026 – durée : 2 h

Exercice 1 - Vrac

1. Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$
3. Résoudre $(2-2i)^4 = iz^3(\sqrt{3}+3i)^2$
4. Linéariser : $f(x) = \sin^2(2x) \cos(3x)$
5. Résoudre :

(1) $\sin(2x) = \cos(3x)$
et
(2) $3 \sin(x) + 2 < \cos(2x)$

Exercice 2 - Forme quasi-trigonométrique

On appelle **forme quasi-trigonométrique** d'un nombre complexe toute écriture de la forme $re^{i\theta}$ où $r, \theta \in \mathbb{R}$. La seule différence avec la forme trigonométrique est que l'on n'impose plus : $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soient α et β deux nombres réels, on définit $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$.
 - a) Mettre le nombre complexe $z = a + b$ sous forme quasi-trigonométrique.
On pourra poser $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$.
 - b) Retrouver la formule du cours : $\cos(x) + \cos(y) = \dots$
2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha + (n-k)\beta)$$

3. Mettre $\frac{a+b}{a-b}$ et $\frac{a+b}{1-ab}$ sous forme quasi-trigonométrique.

Exercice 3 - Géométrie

Les deux questions de l'exercice sont indépendantes. Dans chacune d'elles, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit quatre points M, N, P, Q de façon que les triangles AMB, BNC, CPD et DQA soient rectangles isocèles directs (les angles droits étant en M, N, P, Q respectivement).
 - a) Faire un schéma.
 - b) Exprimer les affixes m, n, p, q des points M, N, P, Q en fonction des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D .
En particulier, considérant le module et l'argument de $\frac{m-a}{b-a}$, montrer que

$$\frac{m-a}{b-a} = \frac{1-i}{2} \text{ et } m = \frac{1+i}{2}a + \frac{1-i}{2}b$$

- c) En déduire que les segments $[MP]$ et $[NQ]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

2. On donne quatre points A, B, M, M' d'affixes respectives a, b, z, z' et on suppose que :

$$\frac{z' - a}{z' - b} + \frac{z - a}{z - b} = 0$$

Soit I le milieu de $[AB]$. En notant m et m' les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$, montrer que le produit mm' s'exprime simplement à l'aide de a et b .

En déduire la relation métrique :

$$IM \times IM' = IA \times IB$$

et montrer que les angles de vecteurs $(\widehat{IA, IM})$ et $(\widehat{IA, IM'})$ ont des mesures opposées.

Exercice 4 - Logarithme à base

Attention ! Dans ce problème, aucun résultat du cours spécifique aux fonctions logarithmes ne pourra être utilisé en l'état. L'objectif est de réintroduire les fonctions logarithmes et d'établir certaines de leurs propriétés.

Partie A : Logarithme de base a

Définition – ■

On appelle **logarithme** toute fonction f définie sur $]0; +\infty[$, dérivable, telle que :

- (i) il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{a}{x}$
- (ii) $f(1) = 0$.

1. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a , tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f'_a(x) = \frac{a}{x}$.
Lorsque $a = 1$, on utilise la notation $\ln$ (logarithme népérien).
2. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de $\ln$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$$

Indication : on pourra étudier, pour y fixé, la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

4. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x)$
5. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que

$$f_a(x^r) = r f_a(x)$$

Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

6. Montrer que la fonction $\ln$ est strictement croissante.
7. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction $\ln$.
8. Comment peut-on généraliser le résultat des questions 6) et 7) au cas des logarithmes f_a ?

Partie B - Logarithme décimal

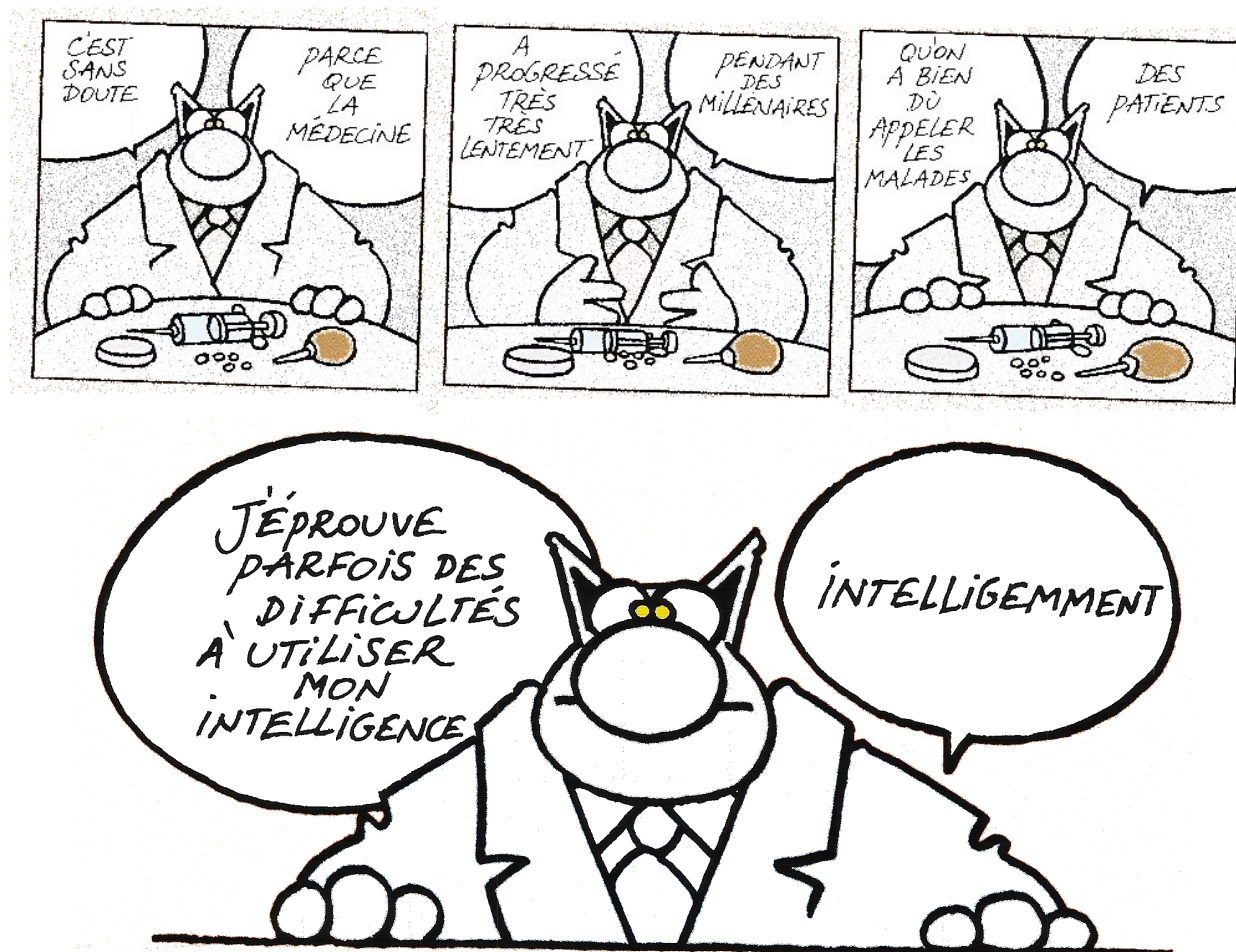
9. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$.
Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.
10. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\text{Log}(N)$.
11. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :
- Combien le nombre 4^{2019} possède-t-il de chiffres ?
 - Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en W.m^{-2}) selon la formule

$$L = 10\text{Log} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

où $I_0 = 10^{-12} \text{W.m}^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000Hz .

- Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de 10^{-5}W.m^{-2} .
 - Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10dB ?
- (c) Une balle lancée d'une hauteur de 2m atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1mm .
Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.



Proposition de corrigé du devoir surveillé 3

Exercice 1 - Vrac

1. La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $] -1, 1[$.

t	$\sin(u)$
dt	$\cos(u)du$
$t = 0$	$u = 0$
$t = x$	$u = \text{Arcsin}(x)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{\cos(u)du}{(1-\sin(u)^2)\sqrt{1-\sin(u)^2}} = \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{\cos(u)du}{\cos(u)^2|\cos(u)|} \\
 &= \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{du}{\cos(u)^2} \quad \text{avec } \cos(u) > 0 \text{ car } u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\
 &= [\tan(u)]_0^{\text{Arcsin}(x)} = \tan(\text{Arcsin}(x)) - 0 \\
 &= \frac{\sin(\text{Arcsin}(x))}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-\sin(\text{Arcsin}(x))^2}} \text{ car } \cos(\text{Arcsin}(x)) > 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}.$

2. Le discriminant de $z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$ est $\Delta = (-(4+i))^2 - 4 \times 1 \times 5(1+i) = -5 - 12i$
On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$:

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \\ x^2 + y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 18 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Donc $\delta = 2 - 3i$ convient et les solutions sont $z_1 = \frac{4+i-\delta}{2} = 1 + 2i$ et $z_2 = 3 - i$.

Ainsi, $\boxed{\text{les solutions de } z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0 \text{ sont } 1 + 2i \text{ et } 3 - i.}$

$$\begin{aligned}
 3. \quad (2-2i)^4 = iz^3(\sqrt{3}+3i)^2 &\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^4 = e^{i\frac{\pi}{2}}z^3\left(2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\frac{\pi}{2}}z^3\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow z^3 = \frac{2^6 e^{i(-\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3})}}{12} = \frac{16}{3}e^{-i\frac{13\pi}{6}} = \frac{16}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}
 \end{aligned}$$

Ainsi, le théorème sur les racines troisièmes donne les solutions :

$$\boxed{\left\{ \sqrt[3]{\frac{16}{3}} e^{-i(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})}; k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \right\}}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \sin^2(2x) \cos(3x) &= \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right)^2 \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} \text{ d'après Euler} \\
&= -\frac{1}{8} (e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}) (e^{3ix} + e^{-3ix}) \\
&= -\frac{1}{8} (e^{7ix} - 2e^{3ix} + e^{-ix} + e^{ix} - 2e^{-3ix} + e^{-7ix}) \\
&= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{7ix} + e^{-7ix}}{2} - 2 \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{4} (\cos(7x) - 2\cos(3x) + \cos(x)) \text{ d'après Euler}
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$f(x) = \sin^2(2x) \cos(3x) = -\frac{\cos(7x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{2} - \frac{\cos(x)}{4}.$$

$$\begin{aligned}
5. \bullet \quad \sin(2x) = \cos(3x) &\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\
&\Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{2} - 3x \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \pmod{2\pi} \\
&\Leftrightarrow 5x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\
&\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{10} \left[\frac{2\pi}{5} \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\mathcal{S}_{(1)} = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi; \quad k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad 3\sin(x) + 2 &< \cos(2x) &\Leftrightarrow & 3\sin(x) + 2 < 1 - 2\sin^2(x) \\
&&\Leftrightarrow & 2u^2 + 3u + 1 < 0 \text{ en posant } u = \sin(x) \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$

Les racines sont $u_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$ et $u_2 = -\frac{1}{2}$.

Le signe est donné par

u	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2u^2 + 3u + 1$	$+$	0	$-$	0
	$+$		$+$	

Ainsi, par lecture sur le cercle trigonométrique,
$$\mathcal{S}_{(2)} = \left] -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Exercice 2 - Forme quasi-trigonométrique

1. a) Soient α et β deux nombres réels, $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$.

$$\begin{aligned} z = a + b &= e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) \\ &\quad \text{en posant } u = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ et } v = \frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= e^{iu} (e^{iv} + e^{-iv}) = e^{iu} 2 \cos(v) \quad \text{Formule d'Euler} \end{aligned}$$

CONCLUSION

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \exp\left(i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$$

- b) En prenant la partie réelle sur l'écriture algébrique et quasi-trigonométrique de z on trouve :

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

2. Utilisons la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha + (n-k)\beta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \exp(i(k\alpha + (n-k)\beta)) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) = \operatorname{Re}((a+b)^n) \\ &= \operatorname{Re} \left(2^n \cos^n\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \exp\left(in\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \right) \end{aligned}$$

CONCLUSION
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha + (n-k)\beta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$$

3. En factorisant de la même façon qu'en 1. :

$$\begin{aligned} a - b &= e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \exp\left(i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \\ \text{ainsi, } \frac{a+b}{a-b} &= \frac{2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \exp\left(i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \exp\left(i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = -\frac{i}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \\ 1 - ab &= 1 - e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i \times 0} - e^{i(\alpha+\beta)} = 2i \sin\left(\frac{0-(\alpha+\beta)}{2}\right) \exp\left(i\left(\frac{0+(\alpha+\beta)}{2}\right)\right) \\ &= -2i \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \exp\left(i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \\ \text{ainsi, } \frac{a+b}{1-ab} &= \frac{2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \exp\left(i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{-2i \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \exp\left(i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)} = i \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \end{aligned}$$

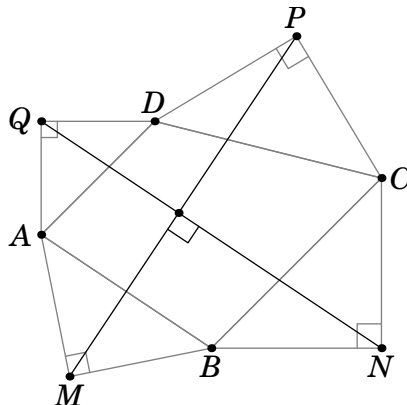
CONCLUSION

$$\frac{a+b}{a-b} = -\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{a+b}{1-ab} = \left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 3 - Géométrie

1. Quadrilatère

- a) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit quatre points M, N, P, Q de façon que les triangles AMB, BNC, CPD et DQA soient rectangles isocèles directs (les angles droits étant en M, N, P, Q respectivement).



- b) Le triangle AMB est un triangle isocèle direct, donc : $\widehat{(\vec{AM}, \vec{AB})} = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Nous en déduisons que les affixes $m - a$ et $b - a$ des vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ vérifient :

$$\frac{m - a}{b - a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - i)$$

$$\text{Donc } m = a + \frac{(1 - i)(b - a)}{2} = \left(\frac{1 + i}{2}\right)a + \left(\frac{1 - i}{2}\right)b$$

Ainsi, le triangle AMB est rectangle en M , isocèle de sens direct, donc :

$$m = \left(\frac{1 + i}{2}\right)a + \left(\frac{1 - i}{2}\right)b$$

De même :

$$n = \left(\frac{1 + i}{2}\right)b + \left(\frac{1 - i}{2}\right)c$$

$$p = \left(\frac{1 + i}{2}\right)c + \left(\frac{1 - i}{2}\right)d$$

$$q = \left(\frac{1 + i}{2}\right)d + \left(\frac{1 - i}{2}\right)a$$

- c) Nous pouvons donc calculer les affixes des vecteurs $\vec{MP}$ et $\vec{NQ}$:

$$p - m = \left(\frac{1 + i}{2}\right)(c - a) + \left(\frac{1 - i}{2}\right)(d - b)$$

$$q - n = \underbrace{\left(\frac{1 + i}{2}\right)(d - b)}_{i \times \left(\frac{1 - i}{2}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1 - i}{2}\right)(a - c)}_{-i \times \left(\frac{1 + i}{2}\right)}$$

$$= i \left(\left(\frac{1 - i}{2}\right)(d - b) - \left(\frac{1 + i}{2}\right)(a - c) \right)$$

$$= i(m - p)$$

Ainsi, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ vérifient :

$$(q - n) = i(p - m)$$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ sont orthogonaux, de même longueur, et :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

2. Points définis par des relations homographiques

On donne quatre points A, B, M, M' d'affixes respectives a, b, z, z' et on suppose que :

$$\frac{z' - a}{z' - b} + \frac{z - a}{z - b} = 0$$

Soit I le milieu de $[AB]$, m et m' les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM'} \Rightarrow z' - a = m' + \frac{b - a}{2}$$

De même : $z' - b = m' - \frac{b - a}{2}$ $z - a = m + \frac{b - a}{2}$ et $z - b = m - \frac{b - a}{2}$

En notant $\alpha = \frac{b - a}{2}$, nous savons donc que :

$$\begin{aligned} \frac{z' - a}{z' - b} + \frac{z - a}{z - b} = 0 &\Leftrightarrow \frac{m' + \alpha}{m' - \alpha} + \frac{m + \alpha}{m - \alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(m' - \alpha)(m - \alpha)} ((m' + \alpha)(m - \alpha) + (m' - \alpha)(m + \alpha)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2mm' - 2\alpha^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow mm' = \alpha^2 \end{aligned}$$

Ainsi, les affixes z et z' des points M et M' vérifient :

$$\frac{z' - a}{z' - b} + \frac{z - a}{z - b} = 0$$

si et seulement si :

$$mm' = \alpha^2 = \left(\frac{b - a}{2}\right)^2$$

Le module appliqué à la relation ci-dessus, donne, tenant compte que $IA = IB = \left|\frac{b - a}{2}\right|$:

$$IM \times IM' = |mm'| = IA \times IB$$

De plus, considérant que $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}}\right) = \arg\left(\frac{m}{\alpha}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM'}}\right) = \arg\left(\frac{m'}{\alpha}\right)$. Alors l'argument appliqué à la relation $\frac{m}{\alpha} \frac{m'}{\alpha} = 1$, donne

$$\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM'}}\right) = \arg\left(\frac{m}{\alpha}\right) + \arg\left(\frac{m'}{\alpha}\right) = \arg\left(\frac{mm'}{\alpha^2}\right) = \arg(1) = 0 \quad [2\pi]$$

Ainsi, les angles de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM'}}\right)$ ont donc des mesures opposées.

Exercice 4 - Logarithme à base

Partie A : Logarithme de base a

1. La fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$ est **continue** sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc elle possède des primitives et en particulier une unique primitive s'annulant en 1.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour $x > 0$, $f'_a(x) = \frac{a}{x} = a \frac{1}{x} = a \ln'(x) = (a \ln)'(x)$.

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_a = a \ln + \alpha$. De plus $f_a(1) = 0 = a \ln(1) + \alpha = \alpha$.

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $f_a = a \ln$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $y > 0$. On considère la fonction $g : x \mapsto f_a(xy) \in \mathbb{R}^*$.

Comme $x \mapsto xy$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$,

$$g'(x) = y f'_a(xy) = y \frac{a}{xy} = \frac{a}{x} = f'_a(x)$$

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g = f_a + \alpha$. De plus, $g(1) = f_a(y)$ par définition et $g(1) = f_a(1) + \alpha = \alpha$ donc $\alpha = f_a(y)$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $g(x) = f_a(x) + f_a(y)$.

Ainsi, pour tout $y > 0$ et tout $x > 0$, $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ et d'après 3)

$$f_a(x) + f_a\left(\frac{1}{x}\right) = f_a\left(x \frac{1}{x}\right) = f_a(1) = 0$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Procédons par étapes.

► Pour $r \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n) : f_a(x^n) = n f_a(x)$

- Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est évidente : $f_a(x^0) = f_a(1) = 0 = 0 f_a(x)$. $\mathcal{P}(1)$ est aussi évidente.
- Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$f_a(x^{n+1}) = f_a(x x^n) \stackrel{3)}{=} f_a(x) + f_a(x^n) \stackrel{HR}{=} f_a(x) + n f_a(x) = (n+1) f_a(x)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_a(x^n) = n f_a(x)$.

► Pour $r \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in -\mathbb{N}^*$, alors

$$f_a(x^n) = f_a\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = f_a\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}\right) \stackrel{-n \in \mathbb{N}}{=} -n f_a\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{4)}{=} n f_a(x)$$

► Pour $r \in \mathbb{Q}$. Soit $r = \frac{n}{d}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}^*$:

$$d f_a\left(x^{\frac{n}{d}}\right) \stackrel{d \in \mathbb{N}}{=} f_a\left(\left(x^{\frac{n}{d}}\right)^d\right) = f_a(x^n) = n f_a(x)$$

En divisant par d on trouve $f_a\left(x^{\frac{n}{d}}\right) = \frac{n}{d} f_a(x)$.

Ainsi, pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, $f_a(x^r) = r f_a(x)$.

6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Ainsi, $\boxed{\ln \text{ est strictement croissante.}}$
7. La croissance de $\ln$ donne l'existence de ses limites en 0 et en $+\infty$.
- $2^n \rightarrow +\infty$ et $\ln(2^n) = n \ln(2) \rightarrow +\infty$ avec $\ln(2) > \ln(1) = 0$.
Par unicité de la limite, $\boxed{\lim_{+\infty} \ln = +\infty}$
 - $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ donc par composition de limite $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ donc $\boxed{\lim_0 \ln = -\infty.}$
8. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors $f_a = a \ln$ est strictement croissante avec $\lim_{+\infty} f_a = +\infty$ et $\lim_0 f_a = -\infty$.
Si $a \in \mathbb{R}_-^*$ alors $f_a = a \ln$ est strictement décroissante avec $\lim_{+\infty} f_a = -\infty$ et $\lim_0 f_a = +\infty$.

Partie B - Logarithme décimal

9. On sait que $f_a = a \ln$ donc

$$f_a(10) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \ln(10) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{\ln(10)}$$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe un unique logarithme } \text{Log} = f_{\frac{1}{\ln(10)}} \text{ tel que } \text{Log}(10) = 1.}$

10. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres.
Alors $N \in \llbracket 10^{n-1}, 10^n - 1 \rrbracket$, et comme Log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après 8), il vient :

$$\begin{aligned} 10^{n-1} \leq N < 10^n &\Rightarrow \text{Log}(10^{n-1}) \leq \text{Log}(N) < \text{Log}(10^n) \\ &\Rightarrow (n-1)\text{Log}(10) \leq \text{Log}(N) < n\text{Log}(10) \\ &\Rightarrow n-1 \leq \text{Log}(N) < n \Rightarrow \lfloor \text{Log}(N) \rfloor = n-1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la partie entière de } \text{Log}(N) \text{ est } n-1.}$

11. Exercices en vrac :

- (a) Le nombre de chiffre de 4^{2019} correspond à la partie entière de son logarithme décimal augmenté de 1 :

$$\text{Log}(4^{2019}) + 1 = 2019\text{Log}(4) + 1 \approx 1216,6$$

Ainsi, $\boxed{\text{le nombre } 4^{2019} \text{ possède } \lfloor 2019\text{Log}(4) \rfloor + 1 \text{ chiffres à savoir } 1216 \text{ chiffres.}}$

- (b) (i) Calcul du niveau sonore :

$$L = 10\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\text{Log}\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10\text{Log}(10^7) = 10 \times 7\text{Log}(10) = 70$$

- (ii) Notons L et L' les niveaux sonores associés respectivement aux intensités I et I' .

$$\begin{aligned} L' = 10 + L &\Leftrightarrow 10\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 10 + 10\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ &\Leftrightarrow \text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) - \text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{Log}\left(\frac{I'}{I}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{I'}{I} = 10 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{une augmentation du niveau sonore de } 10\text{dB} \text{ à pour effet de décupler l'intensité.}}$

- (c) Introduisons une suite pour décrire la hauteur des rebonds successifs. Soit (r_n) la hauteur, en mm, atteinte lors du nième rebond. Alors

$$u_0 = 2000 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} = 0,7r_n$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 2000 \times 0,7^n$.

On cherche le premier n tel $r_n < 1$ ce qui désigne la fin des rebonds.

$$\begin{aligned} r_n < 1 &\Leftrightarrow 2000 \times 0,7^n < 1 \Leftrightarrow \text{Log}(2000 \times 0,7^n) < \text{Log}(1) \\ &\Leftrightarrow \text{Log}(2000) + n\text{Log}(0,7) < 0 \Leftrightarrow n\text{Log}(0,7) < -\text{Log}(2000) \\ &\Leftrightarrow n > -\frac{\text{Log}(2000)}{\text{Log}(0,7)} \end{aligned}$$

Ainsi, La balle s'arrête après $\left\lfloor -\frac{\text{Log}(2000)}{\text{Log}(0,7)} \right\rfloor$ rebonds soit 21 rebonds.

Le 22-ième ne se produit pas.