Corrigé du DM 5

Sujet 1 - Suite récurrente

1. Voici le script PYTHON : on introduit trois variables auxiliaire, `a`, `b` et `c`, une par calcul.

```
n=int(input('Donner n : '))
u=float(input('Donner U0 : '))
v=float(input('Donner V0 : '))
w=float(input('Donner W0 : '))
for i in range(1,n+1):
    a=5*u-4*v-8*w
    b=-9*u+10*v+22*w
    c=6*u-6*v-13*w
    u=a
    v=b
    w=c

    #version avec un affectation simultanée
    #u,v,w=5*u-4*v-8*w,-9*u+10*v+22*w,6*u-6*v-13*w

print('u('+str(n)+') = '+str(u))
print('v('+str(n)+') = '+str(v))
print('w('+str(n)+') = '+str(w))
```

Ce qui donne, par exemple :

```
Donner n : 12
Donner U0 : 1
Donner V0 : -1
Donner W0 : 2
u(12) = -32759.0
v(12) = 8189.0
w(12) = -16378.0
```

2. a) La matrice associé au système est $\boxed{\begin{pmatrix} 5 & -4 & -8 \\ -9 & 10 & 22 \\ 6 & -6 & -13 \end{pmatrix}}$.

b) Procédons par <u>récurrence</u> sur $n \in \mathbb{N}$ avec $\mathcal{P}(n) : \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

- <u>Initialisation :</u> soit $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ par convention donc

$$A^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifié. $\mathcal{P}(1)$ est donné par 1a).

• Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.
D'après 1a), puis d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \times A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

• Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.}$

3. a) Utilisons la méthode du pivot de Gauss, sur la lignes, avec un formalisme matriciel :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{4} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \{ \ L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 4 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{cases}$$

Il y a trois pivots pour $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & -8 \\ 0 & 8 & 0 & 16 & -16 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{8} L_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Ainsi, $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -5 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}}$

b) On trouve $\boxed{AP = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Par exemple, le coefficient $(1,1)$ est obtenu par :

$$a_{1,1}p_{1,1} + a_{1,2}p_{2,1} + a_{1,3}p_{3,1} = 5 \times 4 + (-4) \times (-1) + (-8) \times 2 = 8$$

Afin, on trouve $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D}$.

c) Comme $P^{-1}AP = D$ alors $A = PDP^{-1}$.

Un raisonnement par récurrence donne $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$

4. Comme D est diagonale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (par récurrence).

On a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = PD^n \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -2^{n+1} \\ 5(-1)^{n+1} \\ 9 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_n = 9 - 2^{n+3} \\ v_n = 9 + 2^{n+1} - 10(-1)^n \\ w_n = 5(-1)^n - 2^{n+2} \end{cases}}$

Remarque : Le calcul explicite de A^n n'est pas utile.

Cependant, cela donnerait : $PD^n = \begin{pmatrix} 4 \times 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 2 \times (-1)^n & 1 \\ 2 \times 2^n & -(-1)^n & 0 \end{pmatrix}$ et

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & -2^{n+2} + 4 & -2^{n+3} + 8 \\ -2^n + 4(-1)^n - 3 & 2^n - 4(-1)^n + 4 & 2^{n+1} - 10(-1)^n + 8 \\ 2^{n+1} - 2(-1)^n & -2^{n+1} + 2(-1)^n & -2^{n+2} + 5(-1)^n \end{pmatrix}$$

Sujet 2 - Matrices productives

Partie A - Etude d'exemples

1. On note que $A \geq 0$ et $U \geq 0$. Calcul de $U - AU$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

Ainsi, $\boxed{A \text{ est productive.}}$

2. Soit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Considérons $P - BP$:

$$P - BP = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y + z \\ 2x + y + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y - z \\ -2x - 3z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le troisième coefficient de $P - BP$ est nul donc $P - BP$ n'est pas *strictement positive*. Ceci vaut pour toute matrice positive P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc il n'existe pas matrice positive P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - BP > 0$.

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas productive.}}$

Remarque : : la négation de "il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$" est "pour toute matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $P - MP \not> 0$". Or $P - MP \not> 0$ ne signifie pas $P - MP \leq 0$ mais seulement que le vecteur $P - MP$ possède un coefficient négatif.

Partie B - Caractérisation des matrices positives

3. Considérons deux matrices positives : $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_k) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Posons $Y = MX = (y_k) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La définition du produit matriciel donne :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad y_k = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_{k,j}}_{\geq 0} \underbrace{x_j}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

Or la somme et le produit de nombres positifs est positif, donc Y est une matrice positive.

Ainsi, $\boxed{\text{si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est positive, alors pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ positive, } MX \text{ est aussi positive.}}$

4. Considérons $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant que pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors MX est aussi positive.
En particulier, pour $i \in [\![1, n]\!]$, prenons $X = e_i$: la matrice colonne ayant tous ses coefficients nul excepté celui sur la i-ème ligne qui vaut 1.
Alors Me_i est positive. La calcul de Me_i donne la matrice colonne égale à la i-ème colonne de M. Donc les coefficients de la i-ème colonne de M sont positifs.
Ceci valant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les coefficients de M sont tous positifs.
Ainsi, $\boxed{M \text{ est positive.}}$
Nous venons d'établir la caractérisation suivante :

Un matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors MX est aussi positive.

Partie C - Caractérisation des matrices productives

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ productive et $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive telle que $P - AP > 0$.
a) Comme A et P sont positives, alors d'après B1), la matrice AP est aussi positive. Notons $Q = AP = (q_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $q_i \geq 0$.
Or $P - AP = P - Q > 0$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$p_i - q_i > 0 \quad \Rightarrow \quad p_i > q_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p_i > 0$$

Ainsi, $\boxed{P > 0,\ P \text{ est strictement positive.}}$
b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$.
Notons $R = AX = (r_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec pour $i \in [\![1, n]\!]$, $r_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$.
Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geq r_i$.
Par définition $c = \dfrac{x_k}{p_k} = \min\left\{\dfrac{x_j}{p_j}, j \in [\![1, n]\!]\right\}$. Ainsi, pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$c \leq \frac{x_j}{p_j} \quad \Rightarrow \quad cp_j \leq x_j \quad \Rightarrow \quad ca_{kj}p_j \leq a_{kj}x_j \qquad \text{car } a_{kj} \geq 0 \text{ et } p_j \geq 0$$

Par sommation pour $j \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} ca_{kj}p_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \qquad &\Rightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leq -\sum_{j=1}^{n} ca_{kj}p_j \\ &\Rightarrow \quad x_k - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j}_{=r_k} \leq x_k - \sum_{j=1}^{n} ca_{kj}p_j \end{aligned}$$

Or $x_k - r_k \geq 0$ donc $x_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} ca_{kj}p_j \geq 0$.
De plus $x_k = cp_k$. Ainsi, $\boxed{c\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\right) \geq 0}$.
De plus $P - AP > 0$, en particulier le coefficient de sa k-ème ligne est strictement positif : $p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j > 0$

En divisant l'inégalité trouvée juste avant par ce nombre on obtient : $c \geq 0$.
Il vient pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $x_i \geq cp_i \geq 0$ car $p_i \geq 0$.
Ainsi, $\boxed{c \geq 0 \text{ et } X \text{ est une matrice positive.}}$
c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$.
Alors $X \geq AX$ et d'après C1b), $X \geq 0$.
De plus $-X = -AX = A(-X)$ donc $-X \geq A(-X)$, toujours d'après C1b), $-X \geq 0$.
Les coefficients de X étant positifs et négatifs, ils sont nuls : $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
Ainsi, $\boxed{\text{X est nulle.}}$
On vient de montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$AX - X = (A - I_n)X = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \quad \Rightarrow \quad X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Ceci caractérise le fait que la matrice $A - I_n$ est inversible.

> En effet, si $A - I_n$ est inversible, le résultat est clairement vrai. Montrons l'implication qui nous intéresse :
> L'ensemble des solutions du système associé à l'égalité matricielle $(A-I_n)X = 0$ ne contient qu'un seul élément : $X = 0$.
> Ceci indique que la réduction par la méthode du pivot de Gauss ne donne pas d'inconnue secondaire et donc qu'il y a autant de pivots que d'inconnues (et aussi autant d'équations). La matrice est bien inversible.

Ainsi, $\boxed{A - I_n \text{ est inversible.}}$
d) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice positive et $Y = (I_n - A)^{-1}X$. Alors

$$X = (I_n - A)Y = Y - AY \geq 0$$

D'après C.5.b) $\boxed{Y \text{ est positive.}}$
On vient de montrer que pour tout matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $(I_n - A)^{-1}X$ est aussi positive. D'après la caractérisation des matrice positive vue en B), plus particulièrement B2), nous obtenons que $\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est positive}}$.
6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive telle que $I_n - B$ soit inversible et $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. Posant $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1 alors U est strictement positive. D'après B1) $V = (I_n - B)^{-1}U$ est aussi positive.
De plus $(I_n - B)V = V - BV = U > 0$. Ainsi, $\boxed{B \text{ est productive.}}$
7. D'après C2) et C3) une caractérisation des matrices productive est :

Un matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est productive si et seulement si M est positive, $I - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1}$ est positive.

8. Considérons une matrice positive $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$. Alors,

$$(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n + \underbrace{2M - M - 2M^2}_{=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} = I_n$$

La matrice $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} = I_n + 2M$.
La somme de deux matrices positives étant positive, il vient $(I_n - M)^{-1} \geq 0$. D'après la caractérisation des matrices productives établie en C.7), on peut affirmer que $\boxed{M \text{ est productive.}}$