DM 5

à rendre le mardi 17 novembre 2026

Le sujet 1 est pour tous. Le sujet 2 est optionnel.

Sujet 1 - Suite récurrente

On souhaite déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n - 4v_n - 8w_n \\ v_{n+1} &= -9u_n + 10v_n + 22w_n \\ w_{n+1} &= 6u_n - 6v_n - 13w_n \end{cases}$$

1. Écrire un programme en PYTHON demandant n, u_0, v_0 et w_0 et retournant u_n, v_n et w_n

2. a) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

3. On considère la matrice P suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Calculer AP, puis $P^{-1}AP$. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n lorsque $u_0 = v_0 = w_0 = 1$.

Sujet 2 - Matrices productives

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

- Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite **positive** si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geq 0$.

• Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite **strictement positive** si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.

• Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geq N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

• Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **productive** si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

Partie A - Etude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

Partie B - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

4. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

Partie C - Caractérisation des matrices productives

5. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté a_{ij}, et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P.

a) Montrer que $P > 0$.

b) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X. On désigne par c le plus petit des réels $\dfrac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et k un indice tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.

Établir que $c\Big(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\Big) \geq 0$. En déduire que $c \geq 0$ et que X est positive.

c) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$.

En remarquant que $-X \geq A(-X)$, montrer que X est nulle.

En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser C5b).

En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

6. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

7. Donner une caractérisation des matrices productives.

8. Application : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.

Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.