DM 6

à rendre le lundi 24 novembre 2026

Fonctions indicatrices

Prog

Remarque : On note que pour tout $A \subset E$, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A^2$.
Remarque : Si E est fini, alors pour toute partie A de E, on appelle cardinal de A, noté $\mathrm{Card}(A)$, le nombre d'éléments de A. En particulier, il vient :

$$\mathrm{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Partie A - Indicatrices et opérations ensemblistes

Objectif : Utiliser les propriétés de l'indicatrice pour déterminer des propriétés ensemblistes

1. Soit A, B, C des parties de E.
   - Exprimer $\mathbb{1}_{A\setminus(B\cup C)}$ et $\mathbb{1}_{(A\setminus B)\cap(A\setminus C)}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$.
   - En déduire que $\mathbb{1}_{A\setminus(B\cup C)} = \mathbb{1}_{(A\setminus B)\cap(A\setminus C)}$ et donc que $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
   - Procéder de même pour établir $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ et $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\cup(A\cap C)$

   On calculera l'indicatrice de chacun des ensembles et on utilisera le résultat de la remarque.
2. Utilisant les indicatrices, démontrer les règles de de Morgan pour A, B deux parties de E :

$$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$$

3. De même, démontrer les règles de distributivités pour A, B, C trois parties de E :

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \quad \text{et} \quad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

4. La **différence symétrique** de A et B, deux parties de E, est définie par :

$$A\Delta B = (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$$

a) Montrer que : $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$
b) Montrer que : $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$
c) Pour A, B, C des parties de E, montrer que : $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

5. Caractériser les relations suivantes à l'aide des indicatrices de $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:

$$A\subset B \qquad A\cap B = \emptyset \quad \text{et} \quad A\cup B\cup C = E$$

6. Pour $A, B \subset E$, identifier les ensembles associés aux indicatrices suivantes :

$$\mathbb{1}_C = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_D = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$$

Partie B - Indicatrices et cardinalité

Objectif : Utiliser les propriétés de l'indicatrice pour déterminer des cardinaux

Dans cette partie, E est un ensemble de cardinal fini, $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit $C = \{(A, B); A \subset B \subset E\}$.

a) Approche 1 : Montrer que $(A, B) \mapsto \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ est une bijection de C vers $\mathcal{F}(E, \{0, 1, 2\})$. En déduire le cardinal de C.

b) Approche 2 : Compléter et expliquer les étapes du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(C) &= \sum_{A \subset B \subset E} 1 \\
&\quad \text{choix de } A \text{ puis de } B\backslash A \\
&= \sum_{A \subset E} \sum_{(B\backslash A) \subset (E\backslash A)} 1 \\
&\quad \text{discussion suivant le cardinal de } A : k = \mathrm{Card}(A) \\
&= \sum_{k=?}^{?} \sum_{\substack{A \subset E \\ \mathrm{Card}(A)=k}} \sum_{(B\backslash A) \subset (E\backslash A)} 1 \\
&\quad \dots \\
&= \sum_{k=?}^{?} \sum_{\substack{A \subset E \\ \mathrm{Card}(A)=k}} 2^{n-k} \\
&\quad \text{le nombre de façons de choisir une partie de } k \text{ élement dans } E \text{ est : } \dots \\
&= \dots \\
&\quad \text{formule du binôme} \\
&= (2+1)^n
\end{aligned}$$

8. Dans le cas particulier où $E = \{1, 2, 3\}$, expliciter et déterminer $S_1 = \sum_{A \subset E} \mathrm{Card}(A)$.

9. Compléter la démarche suivante permettant le calcul de $S_1 = \sum_{A \subset E} \mathrm{Card}(A)$ (cas général)

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{A \subset E} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) \\
&\quad \text{on permute les deux sommes} \\
&= \dots \\
&\quad \dots \\
&= \sum_{x \in E} \mathrm{Card}\Big(\mathcal{P}(E\backslash\{x\})\Big) \\
&\quad \dots \\
&= \sum_{x \in E} 2^{n-1} = \dots
\end{aligned}$$

10. Dans le cas particulier où $E = \{1, 2\}$, expliciter et déterminer $S_2 = \sum_{A,B \subset E} \mathrm{Card}(A \cap B)$.

11. De même, calculer $S_2 = \sum_{A,B \subset E} \mathrm{Card}(A \cap B)$ (cas général).

12. De même, calculer $S_3 = \sum_{A,B \subset E} \mathrm{Card}(A \cup B)$