# Dénombrement – Exercices

**Exercice 13.1** On lance 3 pièces ensemble 100 fois de suite et on compte le nombre de *face* sorti : pour la pièce A *face* est sorti 70 fois, pour B 50 fois et pour C 56 fois. *Face* est sorti simultanément pour A et B 31 fois, pour B et C 28 fois.
Montrer que *face* est sorti simultanément pour A, B et C au moins 9 fois, et *pile* au plus 11 fois.

---

**Exercice 13.2** Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On effectue $k$ $(1 \leq k \leq n)$ tirages successifs sans remise d'une boule et on note le numéro. On obtient ainsi une liste de $k$ nombres.
1. Quel est le nombre de résultats possibles ?

2. Combien de suites croissantes peut-on obtenir ?

---

**Exercice 13.3** Une société de voyage propose à ses clients le tour de l'Europe en 8 jours. Il s'agit de visiter 4 capitales européennes en passant deux jours dans chaque ville. Les capitales sont à choisir parmi Rome, Paris, Londres, Amsterdam, Madrid, Prague et Budapest.
Combien y-a-t-il de circuits possibles ?

---

**Exercice 13.4** Déterminer le nombre de numéros de téléphone à 10 chiffres tels que :
1. le numéro est formé avec deux 1, deux 3 et six 7,

2. le numéro est formé avec deux chiffres distincts et deux seulement,

3. le numéro comporte trois 1 et trois seulement.

---

**Exercice 13.5** On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :
1. exactement trois cœurs,

2. au plus trois cœurs,

3. au moins trois cœurs,

4. exactement trois dames et au moins deux piques,

---

**Exercice 13.6**
1. On dispose dix livres sur une étagère.
De combien de façons peut-on les ranger ?

2. Parmi les dix livres, il y a trois livres de maths et quatre romans. Les livres de maths sont rigoureusement identiques, les autres livres sont 2 à 2 distincts. De combien de façon peut-on les ranger si on souhaite que les romans soient côte à côte ? Et si on impose en plus que les livres de maths soient côte à côte ?

---

**Exercice 13.7** Soit $E$ l'ensemble des mots de 9 lettres.
1. Déterminer le cardinal de $E$.

2. Déterminer le nombre de mots de $E$ contenant exactement 4 fois la lettre $a$.

3. Déterminer le nombre de mots de $E$ contenant exactement 2 fois la lettre $a$ et 2 fois la lettre $b$ .

4. Déterminer le nombre de mots de $E$ pour lesquels 2 lettres distinctes se répètent chacune au moins 4 fois.

5. Déterminer le nombre de mots de $E$ pour lesquels au moins 2 lettres distinctes se répètent.

---

**Exercice 13.8**
Le société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.
Une fonction aléatoire place au hasard trois ★ dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Exemple :

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | ★ | | |
| 2 | ★ | | |
| 3 | | ★ | |

On définit les événements $H$, $V$, $D$, $N$ par :
- $H$ : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- $V$ : « les trois jetons sont alignés verticalement ».

- $D$ : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- $N$ : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons.
2. Déterminer le cardinal des évènements $H$, $V$, $D$.
3. En déduire le cardinal de $N$.

**Exercice 13.9** Dans une assemblée, il y a $n$ hommes et $p$ femmes. On doit choisir un bureau comprenant $a$ personnes $(1 \leq a \leq n+p)$
1. Combien y-a-t-il de bureaux comprenant $i$ hommes et $a-i$ femmes ?
2. En déduire
$$\sum_{i=0}^{a} \binom{n}{i}\binom{p}{a-i} = \binom{n+p}{a}$$
en adoptant la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.
3. En déduire
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}^2 = n(n-1)\binom{2n-2}{n}$$

**Exercice 13.10** Soit $E$ un ensemble fini, calculer :
$$S_1 = \sum_{A\subset E} \mathrm{Card}(A), \quad S_2 = \sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A\cap B), \quad S_3 = \sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A\cup B)$$

**Exercice 13.11** Une "*main*" est un sous-ensemble d'un jeu de cartes. Avec un jeu de 52 cartes, combien peut-on former de mains de 8 cartes contenant:
1. le roi de cœur;
2. au moins un roi;
3. exactement un roi et un cœur;
4. 2 cœurs et 6 piques;
5. 2 cartes d'une couleur et 6 d'une autre
6. 4 couleurs: carreau, cœur, pique, trèfle.

**Exercice 13.12** *Tirage sans ordre, avec répétition*
Combien y a t-il de façon de ranger $p$ boules objets indiscernable dans $n$ tiroirs ?

**Exercice 13.13** *Permutation de* $\{1, 2, \ldots, 12\}$
Combien y a-t-il de bijections $f$ de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ dans lui-même vérifiant :
1. la propriété ; $n$ est pair $\quad\Rightarrow\quad f(n)$ est pair ?
2. la propriété ; $n$ est divisible par 3 $\quad\Rightarrow\quad f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions en remplaçant *bijection* par *application.*

**Exercice 13.14**
Nous considérons 10 nombres entiers (aléatoirement choisis) entre 1 et 100. Montrer qu'il est possible, en utilisant ces nombres au plus une fois, d'écrire deux sommes égales.

**Exercice 13.15** Au loto sportif, le parieur remplit une grille dans laquelle il indique ses prévisions pour treize matchs de football à venir. Pour chaque match, il peut cocher au choix trois cases : "1" pour une victoire de l'équipe 1, "2" pour une victoire de l'équipe 2, et "N" pour un match nul. A l'issue d'un match une et une seule de ces trois réponses sera réalisée.
1. De combien de façons un parieur peut-il remplir la grille ?
2. Dénombrer les grilles pour lesquelles à l'issue des matchs :
   a) toutes les réponses sont exactes.
   b) toutes les réponses sont fausses.
   c) exactement trois réponses sont exactes.
3. Pour gagner, il faut avoir coché au moins dix réponses exactes. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?

**Exercice 13.16** A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composée d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres. Par exemple A 1789.
1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien y a-t-il de codes
   a) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   b) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   c) pour lesquels les quatre chiffres sont différents ?
   d) pour lesquels les quatre chiffres distincts sont dans l'ordre croissant ?