

## Fiche 7- Proposition de solutions

**Solution 1** Correspondance entre différentes bases :

en base10	en base2	en base16
10	1010	A
2	10	2
16	10000	10
187	10111011	BB
23	10111	17
2022		

**Solution 2** Numération en base b

```
def base(n,b):
    L=[]
    while n>0:
        L=[n%b]+L
        n=n//b
    if len(L)==0:
        L=[0]
    return L
```

**Solution 3** Si  $b = 2$  ces deux nombres sont égaux. Supposons maintenant que  $b > 2$ .

$$2(b-1) = b + (b-2) \quad \text{et} \quad (b-1)^2 = b^2 - 2b + 1 = (b-2)b + 1$$

Ainsi, ces deux nombres sont bien écrits avec les mêmes chiffres. Par exemple en base 10, cela donne 18 et 81.

**Solution 4** Avec les notations de l'énoncé, la formule du binôme donne :

$$\binom{n}{0} \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} = (b+1)^n = (11)_b^n$$

**Solution 5**

• On trouve que  $8X^4 + 6X^2 + 2 = (2X^2 + X + 1)(4X^2 - 2X + 2)$  ; donc  $(a, b, c) = (4, -2, 2)$ .

• Évaluant ce polynôme pour  $X = 9$ , on obtient une factorisation en base 9 :  $(211)_9$  divise  $(80602)_9$ .

Le quotient se détermine en écrivant en base 9 le nombre

$$4 * 9^2 - 2 * 9 + 2 = 3 * 9^2 + 7 * 9 + 2$$

Le quotient est  $(372)_9$ .

**Solution 6** On note que  $3 * b^4 \approx 10^4 + 2 * 10^3 \Rightarrow b \approx 7,95$ . Essayons avec la base 8 :

$$(30407)_8 = 3 * 8^4 + 4 * 8^2 + 7 = 12551$$

**Solution 7** Le problème se ramène à résoudre

$$(*) \quad 49x + 7y + z = 81z + 9y + x \quad \text{avec} \quad x, y, z \in [0, 6]$$

$$(*) \Rightarrow 48x = 2y + 80z \Rightarrow 24x = y + 40$$

$$\Rightarrow 24 \wedge 40 = 8|y \Rightarrow y = 0$$

On en déduit  $x = 5$  et  $z = 3$ .

Ainsi, ce nombre est  $(503)_7 = (305)_9 = (248)_{10}$ .

**Solution 8** Le problème se réduit à trouver

$$a, b, c \in [0, 6]; \quad 11^3 a + 11^2 b + 11c + a = 7^3 b + 7^2 b + 7a + c \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow 1325a + 10c = 271b \Rightarrow 5|b \Rightarrow b \in \{0, 5\}$$

• Si  $b = 0$  alors il n'y a pas de solution.

• Si  $b = 5$  alors on déduit  $a = 1$  et  $c = 3$ .

Ainsi, ce nombre est  $(1531)_{11} = (5513)_7 = (1970)_{10}$ .

**Solution 9** On remarque que  $(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)(i) = 0$  donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 | x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \Rightarrow \forall b \geq 2, 101_b | 11211_b$$

Ainsi ce nombre n'est jamais premier, quelle que soit la base que l'on considère.

**Solution 10**

Supposons que  $a$  s'écrit  $(xyz)_{10}$ , alors  $\overline{a} = (zyx)_{10}$ .

Quitte à échanger les notations  $x$  et  $z$ , on peut supposer  $x > z$ . Ainsi,

$$b = xyz_{10} - zyx_{10} = (x - z - 1)10^2 + 9 * 10 + (z - x + 10)$$

$$\text{Donc } b + \overline{b} = 9 * 10^2 + 2 * 9 * 10 + 9 = 10 * 10^2 + 8 * 10 + 9 = 1089.$$

**Solution 11 Critères de divisibilité**

On considère que  $n = \sum_{i=0}^k a_i b^i$  en base  $b$ .

•  $2|1234x$  : Comme  $10 \equiv 0 [2]$  alors  $2|n \Leftrightarrow 2|a_0$ .

Donc  $x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ .

•  $3|1x43x$  : Comme  $10 \equiv 1 [3]$  alors  $3|n \Leftrightarrow 3|\sum a_i$ .

Donc  $x \in \{1, 4, 7\}$ .

•  $4|32xx2$  : Comme  $10^2 \equiv 0 [4]$  et  $10 \equiv 4 = 2$  alors

$$4|n \Leftrightarrow 4|a_0 + 2a_1$$

Donc  $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

•  $5|2x30$  : Comme  $10 \equiv 0 [5]$  alors  $5|n \Leftrightarrow 5|a_0$ .

Donc  $x$  quelconque convient.

•  $6|1x1x$  : par 2 et par 3  $6|n \Leftrightarrow 2|a_0$  et  $3|\sum a_i$ .

Donc  $x \in \{1, 4, 7\}$ .

•  $7|1070x$  : Comme  $10^3 \equiv -1 [7]$  alors

$$7|n \Leftrightarrow 7|\sum (-1)^i a_{3i+2} a_{3i+1} a_{3i}$$

Donc  $7|1070x \Leftrightarrow 7|70x - 10 \Leftrightarrow 7|x - 10 \Leftrightarrow x = 3$ .

•  $8|1x52$  : Comme  $10^3 \equiv 0 [8]$ ,  $10^2 \equiv 4 [8]$  et  $10 \equiv 2 [8]$  alors

$$8|n \Leftrightarrow 8|a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

Donc  $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

•  $9|x345$  : Comme  $10 \equiv 1 [9]$  alors  $9|n \Leftrightarrow 9|\sum a_i$ .

Donc  $x = 6$ .

- $11|1x43x$  : Comme  $10 \equiv -1$  [11] alors

$$11|n \Leftrightarrow 11|\sum(-1)^i a_i$$

Donc  $x$  quelconque convient.

- $3|(101011x00)_2$  : Comme  $2 \equiv -1$  [3] alors

$$3|n_2 \Leftrightarrow 3|\sum(-1)^i a_i$$

Donc  $3|2-x$ , c'est-à-dire  $x=2$ .

- $4|(3x3)_5$  : Comme  $5 \equiv 1$  [4] alors  $9|n \Leftrightarrow 9|\sum a_i$ .

Donc  $x=6$ .

- $10|(2x10)_3$  : Comme  $3^2 \equiv -1$  [10] alors

$$10|n \Leftrightarrow 10|\sum(-1)^i a_{2i+1} a_{2i}$$

Donc c'est impossible car il faudrait que  $10|3+x$ .

- $2|(6x5)_7$  : Comme  $7 \equiv 1$  [2] alors  $2|n \Leftrightarrow 2|\sum a_i$ .

Donc  $x \in \{1, 3, 5\}$ .

- $16|(x3x1)_7$  : Comme  $7^2 \equiv 1$  [16] alors

$$16|n \Leftrightarrow 16|\sum a_{2i+1} a_{2i}$$

Donc  $x=2$ .

- $4|(3xx)_6$  : Comme  $6^2 \equiv 0$  [4] alors  $4|n \Leftrightarrow 4|2a_1 + a_0$ .

Donc  $x \in \{0, 4\}$ .

**Solution 12** Sur 6 bits, les nombres représentés sont  $[-32, 31]$ .

en base 10	méthode 1	Complément à 2
19	010011	010011
-19	110011	101101
-14	101110	110010
25	011001	011001
23	010111	010111
-1	100001	111111

**Solution 13** L'addition dans la représentation binaire

$$\begin{array}{r} \text{Méthode 1 :} \quad 010011 \quad [19] \\ + \quad 101110 \quad [-14] \\ \hline = \quad 000001 \quad [1] \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 010011 \quad [19] \\ + \quad 110010 \quad [-14] \\ \hline = \quad 000101 \quad [5] \end{array}$$

La représentation des nombres entiers relatifs par la méthode 2 du complément à 2 est compatible avec l'addition contrairement à celle de la méthode 1.

**Solution 14** On travaille avec une représentation sur  $n$  bits et  $a, b$  tels que  $a+b \in [-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$ . Procédons par disjonction de cas :

- si  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  alors la somme des représentations donne celle de  $a+b$  ;
- si  $a \geq 0$  et  $b < 0$  alors la somme des représentations donne  $2^n + a + b \equiv a + b [2^n]$  qui est bien la représentation de  $a+b$  ;
- si  $a < 0$  et  $b < 0$  alors la somme des représentations donne  $2^n + 2^n + a + b \equiv 2^n + a + b [2^n]$  qui est bien la représentation de  $a+b$ .