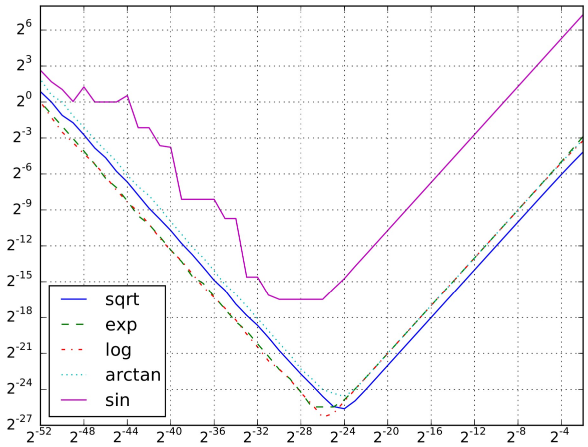
TP 19- Proposition de solutions

Solution 1

```
da=lambda f,a,h:(f(a+h)-f(a))/h
```

```
def eda(f,df,a,b,h):
    e=abs(da(f,a,h)/df(a)-1)
    while a<b:
        a=a+0.01
        ee=abs(da(f,a,h)/df(a)-1)
        if ee>e:
            e=ee
    return(e)
```

```
plt.close()
F=[np.sqrt,np.exp,np.log,np.arctan,np.sin]
dF=[lambda t:1/2/np.sqrt(t),np.exp,lambda t:1/t
              ,lambda t:1/(1+t*t),np.cos]
H=[2**(-k) for k in range(2,53)]
trait=['-','--','-.',':','-']
for i in range(len(F)):
    plt.loglog(H,[eda(F[i],dF[i],1,2,h) for h in H]
        ,linestyle=trait[i],basex=2,basey=2
        ,label=str(F[i])[8:-2])
plt.grid()
plt.legend(loc='best')
plt.show()
```



Solution 2

1. Considérant f de classe $\mathscr{C}^3$, la formule de Taylor-Young en a donne :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + o(h^3)$$

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + o(h^3)$$

Ainsi, $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a) + \dfrac{h^2}{6}f^{(3)}(a) + o(h^2)$

2. Calcul des erreurs :

- l'erreur théorique est de l'ordre de $\dfrac{h^2}{6}|f^{(3)}(a)|$
- l'erreur d'arrondi est de l'ordre de $\dfrac{2^{-53}|f(a)|}{2h}$

L'erreur est optimisée pour h vérifiant :

$$\frac{h^2}{6}|f^{(3)}(a)| \approx \frac{2^{-52}|f(a)|}{h}$$

Considérant que les calcul de $f(a)$ et de $f^{(3)}(a)$ sont du même ordre erreur, cela donne :

$$h^3 \approx 2^{-50} \quad \Leftrightarrow \quad h \approx 2^{-17} \quad \Leftrightarrow \quad h \approx 10^{-7}$$

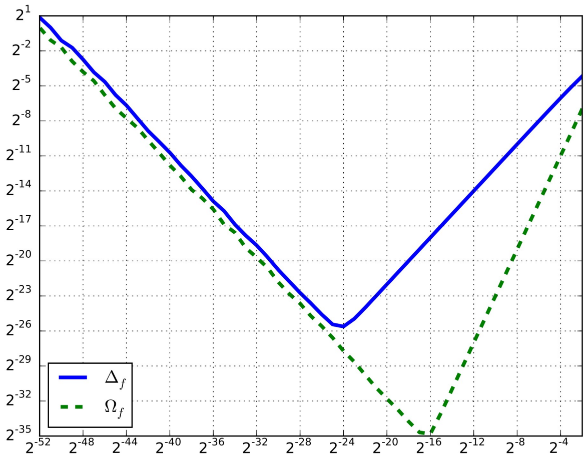
3. Les fonctions adaptée à la nouvelle approximation sont :

```
da2=lambda f,a,h:(f(a+h)-f(a-h))/h/2
```

```
def eda2(f,df,a,b,h):
    e=abs(da2(f,a,h)/df(a)-1)
    while a<b:
        a=a+0.01
        ee=abs(da2(f,a,h)/df(a)-1)
        if ee>e:
            e=ee
    return(e)
```

4. Comparaison des deux approximations :

```
plt.close()
H=[2**(-k) for k in range(2,53)]
plt.loglog(H,[eda(np.sqrt,lambda t:1/2/np.sqrt(t)
        ,1,2,h) for h in H],linestyle='-',basex=2
        ,basey=2,label='$\Delta_{f}$')
plt.loglog(H,[eda2(np.sqrt,lambda t:1/2/np.sqrt(t)
        ,1,2,h) for h in H],ls='--',basex=2,basey=2
        ,label='$\Omega_{f}$')
plt.grid()
plt.legend(loc='best')
plt.show()
```



Solution 3 Supposons la fonction f de classe $\mathscr{C}^5$. La formule de Taylor-Young en a à l'ordre 5 donne :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f^{(3)}(a)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(a)+\frac{h^5}{120}f^{(5)}(a)+o(h^5)$$
$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)-\frac{h^3}{6}f^{(3)}(a)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(a)-\frac{h^5}{120}f^{(5)}(a)+o(h^5)$$
$$f(a+2h)=f(a)+2hf'(a)+2h^2f''(a)+\frac{4h^3}{3}f^{(3)}(a)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(a)+\frac{4h^5}{15}f^{(5)}(a)+o(h^5)$$
$$f(a-2h)=f(a)-2hf'(a)+2h^2f''(a)-\frac{4h^3}{3}f^{(3)}(a)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(a)-\frac{4h^5}{15}f^{(5)}(a)+o(h^5)$$

Donc

$$f(a+h)-f(a-h)=2hf'(a)+\frac{h^3}{3}f^{(3)}(a)+\frac{h^5}{60}f^{(5)}(a)+o(h^5)$$
$$f(a+2h)-f(a-2h)=4hf'(a)+\frac{8h^3}{3}f^{(3)}(a)+\frac{8h^5}{15}f^{(5)}(a)+o(h^5)$$

Enfin

$$8\big(f(a+h)-f(a-h)\big)-\big(f(a+2h)-f(a-2h)\big)=12hf'(a)-\frac{2h^5}{5}f^{(5)}(a)+o(h^5)$$

Ainsi, $\dfrac{8f(a+h)-8f(a-h))-f(a+2h)+f(a-2h)}{12h}=f'(a)-\dfrac{h^4}{30}f^{(5)}(a)+o(h^4)$

On pose la nouvelle approximation de $f'(a)$:

$$\Gamma_{f,a}(h)=\frac{8f(a+h)-8f(a-h)-f(a+2h)+f(a-2h)}{12h}$$

Calcul des erreurs :

- l'erreur théorique est de l'ordre de $\dfrac{h^4}{30}|f^{(5)}(a)|$
- l'erreur d'arrondi est de l'ordre de $\dfrac{2^{-53}|f(a)|}{12h}$

L'erreur est optimisée pour h vérifiant :

$$\frac{h^4}{30}|f^{(5)}(a)|\approx\frac{2^{-53}|f(a)|}{12h}$$

Considérant que les calcul de $f(a)$ et de $f^{(5)}(a)$ sont du même ordre erreur, cela donne :

$$h^5\approx 2^{-51}\quad\Leftrightarrow\quad h\approx 2^{-10}\quad\Leftrightarrow\quad h\approx 10^{-3}$$

Les fonctions adaptée à cette nouvelle approximation sont :

```python
da3=lambda f,a,h:(8*f(a+h)-8*f(a-h)-f(a+2*h)
                              +f(a-2*h))/h/12

def eda3(f,df,a,b,h):
        ...

...
plt.loglog(H,[eda3(np.sqrt,lambda t:1/2/np.sqrt(t)
        ,1,2,h) for h in H],ls='-.',basex=2,basey=2
        ,label='$\Gamma_{f}$',lw=3)
...
```