TP 19 - Dérivation numérique

Si f est une fonction dérivable, le taux d'accroissement :

$$\Delta_{f,a}(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

est une valeur approchée de la dérivée lorsque $h \to 0$.

En faisant un développement limité de f (formule de Taylor-Young) en a, supposée de classe $\mathscr{C}^2$, on trouve :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2)$$

Ainsi, $\Delta_{f,a}(h) = f'(a) + \frac{h}{2}f''(a) + o(h)$.

Estimons les erreurs de cette approximation :

- l'erreur théorique introduite en remplaçant $f'(a)$ par $\Delta_{f,a}(h)$ et de l'ordre de $\frac{h}{2}|f''(a)|$.
- l'erreur d'arrondi par le calcul de $\Delta_{f,a}(h)$ est de l'ordre de $\frac{2^{-53}|f(a)|}{h}$.

Attention ! L'erreur total est minimisée lorsque l'erreur théorique et l'erreur d'arrondi sont égales !

Dans notre situation, l'erreur est optimisée pour h vérifiant :

$$\frac{h|f''(a)|}{2} \approx \frac{2^{-53}|f(a)|}{h}$$

Considérant que les calcul de $f(a)$ et de $f''(a)$ sont du même ordre erreur, cela donne :

$$h^2 \approx 2^{-52} \quad \Leftrightarrow \quad h \approx 2^{-26} \quad \Leftrightarrow \quad h \approx 10^{-8}$$

Exercice 1

1. Écrire une fonction `da(f,a,h)` qui retourne $\Delta_{f,a}(h)$.
2. Écrire une fonction `erreur_da(f,df,a,b,h)` qui retourne la valeur maximale de

$$\left|\frac{\Delta_{f,u}(h)}{f'(u)} - 1\right|$$

pour $u \in [a,b]$ par pas de 0.01 où `df` est la dérivée de `f`.

3. Afficher sur un même graphe la courbe de la fonction erreur_da, pour $h \in \{2^{-k}, k \in [\![1,52]\!]\}$, $[a,b] = [1,2]$, des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, exp, ln, Arctan, sin.

Les courbes seront affichées dans une repère logarithmique en base 2 :

```
plt.loglog(x,y,basex=2,basey=2)
```

Exercice 2 Considérons la quantité

$$\Omega_{f,a}(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

1. Déterminer que si f est dérivable en a alors $\Omega_{f,a}(h)$ est une approximation de $f'(a)$.
2. Quitte à considérer f de classe suffisante, déterminer l'ordre de grandeur de h qui optimise l'erreur d'approximation.
3. Écrire les fonctions `da2(f,a,h)` et `erreur_da2(f,df,a,b,h)` relatives à cette nouvelle approximation.
4. Tracer sur un même graphe les fonctions erreur_da et erreur_da2 appliquée à la fonction de votre choix, pour $h \in \{2^{-k}, k \in [\![1,52]\!]\}$.

Les courbes seront affichées dans une repère logarithmique en base 2.

Exercice 3 Proposer une nouvelle approximation qui améliore encore la précision pour un pas h plus grand.