Le passage MPSI —> MP

Durant cette belle année en MPSI, vous avez découvert de grands domaines des mathématiques. Algèbre matricielle, algèbre abstraite… Définition de nouveaux nombres ou fonctions par des sommes de séries ou par des intégrales… Analyse à une ou plusieurs variables réelles… Une sacrée introduction aux probabilités, qui n'est que le début d'une histoire dont on va vous parler longtemps (les notions de certitude, incertitude, risque structurent notre regard scientifique sur le monde qui nous entoure).

Vous avez aussi appris ce que veut dire travailler en mathématiques. Seul devant une page blanche, ou à plusieurs pour se motiver (au tableau par exemple). Vous avez découvert la difficulté, mais aussi l'élégance, et je l'espère : le plaisir, de faire des mathématiques. Les mêmes mécanismes de raisonnement, les mêmes questionnements, s'appliquent à tous les champs de notre discipline.

L'an prochain vos professeurs seront là pour vous aider. Pour vous en convaincre, ils vous proposent quelques travaux d'été. En mathématiques, j'ai sélectionné des débuts de problèmes posés aux concours, tous abordables par un élève de première année. La difficulté va croissante.

Pb 1 : *Algèbre linéaire (trouver une base adaptée à la résolution d'un problème).*
Pb 2 : *Calcul matriciel élémentaire (révisions).*
Pb 3 : *Calcul de projetés orthogonaux très simples.*
Pb 4 : *Étude élémentaire de la moyenne arithmético-géométrique.*
Pb 5 : *Formule de Taylor-Lagrange, et inégalité de Kolmogorov.*
Pb 6 : *Un problème d'analyse linéaire : le cours d'algèbre linéaire s'invite dans un problème d'analyse.*
Pb 7 : *Première étude de la suite logistique.*
Pb 8 : *Fonctions absolument monotones, fonctions tangente*
Pb 9 : *Calcul de la somme d'une série grâce à une expression intégrale de cette somme.*
Enfin en probabilités :
Pb 10 : *Étude de la loi hyper-géométrique (loi classique).*
Pb 11 : *Tirage dans une population avec une sous-population d'individus V.I.P.*
Pb d'algèbre générale : *Autour de l'irrationalité*
Pb d'algèbre linéaire : *Matrices de trace nulle, commutateurs.*
Pb d'algèbre euclidienne : *Étude des polynômes de Legendre.*
Pb de synthèse : *Sur les valeurs $\zeta(2n)$ de la fonction zeta aux entiers pairs.*

Il faut absolument entretenir vos connaissances pendant les vacances. Reprendre les DM et DS de l'année avec l'objectif (puisque pour ceux-là le corrigé est déjà disponible), de les finir et de les assimiler.

Je ne veux pas vous mentir : l'an prochain votre réussite dépendra directement de vos efforts. En particulier dans la direction la plus ingrate du travail de l'étudiant : étudier son cours, et l'étudier encore, jusqu'à savoir les résultats par coeur, et savoir expliquer comment ils se démontrent (c'est-à-dire savoir pourquoi ils sont vrais).

Un conseil : dégagez les définitions et résultats essentiels (énoncés précis), sur des fiches de mémorisation

Exemples : Définitions et résultats essentiels d'algèbre linéaire… Résultats sur la dimension finie… Propriétés générales et calculs classiques de déterminants… Propriétés de l'intégrale sur un segment… IPP et changements de variable…

Un critère pour juger de l'importance d'un énoncé : s'il faut l'utiliser dans l'une des questions de ce fascicule, c'est à savoir absolument (on nous pose une question et la réponse est dans le cours !).

À vos plumes !

Problème 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, de base (e_1, e_2, e_3), et soit u l'endomorphisme de E de matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Partie I — « *Diagonalisation* » *de* u

1. Déterminer une base $\left(e'_1\right)$ du s.e.v. $\ker\left(2\mathrm{I}+u\right)$.
2. Déterminer une base $\left(e'_2, e'_3\right)$ du s.e.v. $\ker\left(\mathrm{I}-u\right)$.
3. Démontrer que $\left(e'_1, e'_2, e'_3\right)$ est une base B' de E.
4. Établir que la matrice de u dans B' est diagonale.

Partie II — *Endomorphismes* v *qui sont des « racines carrées » de* u

5. Analyse du problème : on suppose qu'un endomorphisme v vérifie : $v^2 = u$ (racine carrée de u)

a) Démontrer que u et v commutent : $u \circ v = v \circ u$.

b) Démontrer que $u\left(v(e'_1)\right) = -2v(e'_1)$.

c) Qu'en déduit-on pour le vecteur $v(e'_1)$?

d) Démontrer que $u\left(v(e'_2)\right) = v(e'_2)$.

e) Qu'en déduit-on pour le vecteur $v(e'_2)$?

f) Justifier la même propriété pour le vecteur $v(e'_3)$.

g) La matrice de v dans la base B' est donc de la forme $K = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}$. Calculer K^2.

6. Synthèse

Existe-t-il des endomorphismes v vérifiant $v^2 = u$? Quels sont-ils ?

Problème 2

On définit les matrices d'ordre 3 :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \text{et enfin}\quad I=I_3$$

Partie I — Deux calculs de A^n

<u>Première méthode</u>

1. Calculer N^2, N^3, et enfin N^n pour tout $n\geq 2$.
2. ***a)*** Exprimer A^n en fonction des matrices I, N, N^2 et de n (on écrira $A=I+N$ et on utilisera la formule du binôme).

   b) Achever le calcul de la matrice A^n.

<u>Deuxième méthode</u>

On considère trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ vérifiant le système de récurrences :

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n+3c_n\\ b_{n+1}=b_n+2c_n\\ c_{n+1}=c_n\end{cases}$$

3. Donner l'expression de c_n en fonction de la constante c_0.
4. Quelle est alors la nature de la suite (b_n) ? Donner son expression en fonction de b_0 et de n.
5. ***a)*** Écrire la relation $a_{n+1}=a_n+2b_n+3c_n$ en remplaçant b_n et c_n par leurs valeurs (obtenues aux questions 3 et 4).

   b) Chercher une solution particulière de la forme $\alpha n^2+\beta n$

   c) Écrire la relation de récurrence vérifiée par $a_n-(\alpha n^2+\beta n)$, et en déduire a_n en fonction de n.

Partie II — Trois calculs de A^{-1}

6. Justifier que A est inversible. Calculer son inverse par la méthode du pivot.
7. Développer $(I+N)\cdot(I-N+N^2)$ et en déduire A^{-1}.
8. ***a)*** Déterminer une relation de la forme :

$$aA^3+bA^2+cA+dI=0.$$

   b) En déduire A^{-1}.

Problème 3

Calcul de distances euclidiennes simples

On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

La norme euclidienne associée est, par définition, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^{\perp}$ son orthogonal, et p_F le projecteur orthogonal sur F i.e. le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Enfin, si $x \in E$ on définit la distance euclidienne de x à F, notée $\mathrm{d}(x, F)$, le réel

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf\{\mathrm{d}(x, y) \ / \ y \in F\}$$

(*i*) Rappeler l'expression de la distance euclidienne $\mathrm{d}(x, F)$ en fonction du projeté orthogonal de x sur F, noté $p_F(x)$. En déduire : $\mathrm{d}(x, F) = \|p_{F^{\perp}}(x)\|$, où $p_{F^{\perp}}(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $F^{\perp}$.

(*ii*) Cas des hyperplans

Soit n un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à n, c'est-à-dire que $H = [\mathrm{Vect}(n)]^{\perp}$.

Exprimer pour $x \in E$, la distance $\mathrm{d}(x, H)$ en fonction de $\langle x \mid n \rangle$ et de $\|n\|$.

(*iii*) Le produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

Sur $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on définit le produit scalaire euclidien canonique, et la norme euclidienne canonique :
Pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A \mid B \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$$

et pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\| = \Big[\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \Big]^{1/2}$$

(*iii-a*) Démontrer que pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}} B)$, et aussi $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}} A) = \mathrm{tr}(A B^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(B A^{\mathrm{T}})$

C'est l'expression matricielle par la trace, de ce produit scalaire

On note H l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est égale à 0.

(*iii-b*) Justifier que H est un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et en déduire sa dimension.

(*iii-c*) Déterminer $H^{\perp}$.

(*iii-d*) Soit M une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\mathrm{d}(M, H)$ en fonction de $\mathrm{tr}(M)$ et de n.

(*iv-a*) Démontrer que l'ensemble l'ensemble $\mathscr{D}$ des matrices diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est un s.e.v. de dimension n

En déduire la dimension de $\mathscr{D}^{\perp}$.

(*iv-b*) Préciser $\mathrm{d}(M, \mathscr{D})$, en fonction des coefficients de M.

Problème 4

Moyenne arithmético-géométrique

Ce problème a pour objet l'étude de la moyenne arithmético-géométrique $\mathrm{M}(a, b)$ de deux réels positifs a, b. La fonction $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x) = \mathrm{M}(1,x)$ a été étudiée et en plus d'être de classe C^1, elle vérifie $f(x) \sim \frac{\pi x}{2 \ln x}$.
Pour tous $a, b \geq 0$, on définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Dans le cas particulier où $a = 1$, on notera $u_n(x) = a_n$ et $v_n(x) = b_n$ pour les suites (a_n) et (b_n) définies à partir de $a_0 = 1$, $b_0 = x$.

Notons que les suites adjacentes $u_n(x), v_n(x)$ de ce texte sont à l'origine d'un algorithme efficace de calcul des décimales de π (la méthode de Salamin).

I — CONVERGENCE DES SUITES (a_n), (b_n)

1. Démontrer : $0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$.
2. En déduire, lorsque $a \neq b$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ et $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n)$.
3. Que dire des suites (a_n) et (b_n) lorsque $a = b$?
4. Démontrer, dans tous les cas, que les suites (a_n) et (b_n) convergent, vers la même limite.

On note $\mathrm{M}(a, b)$ la limite commune de ces deux suites.

II — LIEN AVEC LA FONCTION f

Démontrer :

5. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(b, a)$.
6. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}(a_{n_0}, b_{n_0}) = \mathrm{M}(a, b)$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathrm{M}(b, a)$.

En déduire :

8. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$ avec $a \neq 0$, on a $\mathrm{M}(a, b) = a f(\frac{b}{a})$.

III — CONTINUITÉ DE f

9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto u_n(x)$ et $x \mapsto v_n(x)$ sont continues.
10. Établir, pour tout $n \geq 1$:
$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq u_n(x) - f(x) \leq 2^{-n} |1 - x|.$$
11. Démontrer, pour tous $x, x_0 \in \mathbb{R}^+$:
$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| + |f(x_0) - u_n(x_0)|$$
12. En déduire que f est une fonction continue.

À vos plumes !

IV — ÉTUDE DE f AU VOISINAGE DE 1

13. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$0 \leq \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$$

14. En déduire que la fonction f est dérivable en 1.

Nous allons admettre la dérivabilité et la classe C^1 de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

V — ÉTUDE DE f EN 0 ET EN $+\infty$

15. Calculer $f(0)$, et la limite en 0 de $\frac{f(x)}{x}$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

16. Démontrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x\, f(\tfrac{1}{x}).$$

17. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

VI — SENS DE VARIATION DE f

18. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, les fonctions $x \mapsto u_n(x)$ et $x \mapsto v_n(x)$ sont croissantes

19. En déduire que la fonction f est croissante.

VII — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

20. Écrire un programme Python MAG(x) qui calcule successivement les termes u_1, v_1, u_2, v_2, etc., et qui retourne une valeur approchée de $\mathrm{M}(1,x)$ à 10^{-5} près.

On pourra utilise la remarque suivante :

$$0 \leq u_n - f(x) \leq u_n - v_n.$$

Il suffit donc d'interrompre le calculs des termes successifs lorsque le test $u_n - v_n < 10^{-5}$.

21. À l'aide de ce programme, donner un tableau de valeurs de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x :

0,01 0,1 0,2 0,4 0,6 0,8 2 3 10 100

22. Donner une représentation graphique sur $[0, 3]$ de la fonction f, ainsi que des fonction :

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1+x}{2}.$$

À vos plumes !

Problème 5

Partie A — Démonstration du théorème de Taylor-Lagrange

Nous allons démontrer le théorème suivant :

> Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors :
>
> il existe $c \in]a,b[$ vérifiant : $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

1. Dans cette question nous définissons une fonction φ_A en posant, pour tout $x \in [a,b]$
$$\varphi_A(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$
   (a) Justifier que la fonction φ_A est continue sur $[a,b]$.

   (b) Justifier ensuite que φ_A est dérivable sur $]a,b[$ et calculer $\varphi_A'(x)$.

2. (a) Trouver la valeur de A_0 de façon que $\varphi_{A_0}(a) = 0$.

   Désormais, on se limite à cette valeur de A et on note φ la fonction φ_{A_0}.

   (b) Justifier qu'on peut appliquer à φ la théorème de Rolle sur $[a,b]$.

   (c) Conclure.

PARTIE B — Constante de Kolmogorov pour un intervalle $]a,+\infty[$

Pour un réel a fixé, on considère une fonction $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que les fonctions f et f'' sont bornées, et on pose (notations classiques) :
$$M_0 = \sup_{x\in]a,+\infty[} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x\in]a,+\infty[} |f''(x)|.$$
L'objectif de cette partie est de prouver que f' est également bornée, et que :
$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2} \quad \text{où} \quad M_1 = \sup_{x\in]a,+\infty[} |f'(x)|$$

3. Fixons $x_0 \in]a,+\infty[$ et $h > 0$. On pose $x = x_0 + h$.

   (a) Justifier qu'il existe $c \in]x_0, x[$ vérifiant : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(c)}{2}h^2$.

   (b) En déduire que $|f'(x_0)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

4. En déduire alors que la fonction f' est bornée sur $]a,+\infty[$. On pose alors
$$M_1 = \sup_{x\in]a,+\infty[} |f'(x)|.$$

5. Pour des réels $A, B > 0$ fixés, on pose $\phi(h) = \frac{A}{h} + hB$.

   Étudier les variations de ϕ sur $]0,+\infty[$

   En déduire un minorant de ϕ sur $]0,+\infty[$.

6. Conclure.

À vos plumes !

Problème 6

On note E l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables.
On note D l'application définie sur E, et à valeurs dans E, qui à toute fonction $f \in E$ associe $D(f) = f'$. On note Id_E l'identité de E.

On fixe un réel $\alpha \neq 0$, et on note F_α l'ensemble des fonctions de E de la forme :

$$x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} + Q(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Enfin Id_α est l'identité sur F_α.

1. a. Montrer que F_α est un s.e.v. de E.

   b. On considère les fonctions suivantes :

   $$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x} \qquad f_2 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{\alpha x} \qquad f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x} \qquad f_4 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

   Montrer que cette famille est une base B de E.

2. On note D_α la restriction de l'endomorphisme de dérivation D à F_α ; c'est-à-dire que pour toute $f \in F_\alpha$ on a $D_\alpha(f) = f'$.

   a. Montrer que D est un endomorphisme de E.

   Déterminer son noyau et son image.

   b. Montrer que D_α est un endomorphisme de F_α.

   c. Déterminer la matrice M_α de l'endomorphisme D_α dans la base B.

   d. Prouver que la matrice M_α admet une matrice inverse.

3. On note D_α^2 l'endomorphisme de F_α définie par $D_\alpha^2(f) = f''$ pour toute fonction $f \in F_\alpha$.

   a. Déterminer, en discutant suivant la valeur du réel α, le noyau de l'endomorphisme :

   $$\Phi = D_\alpha^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_\alpha$$

   b. En déduire son rang.

   On pourra utiliser le cours sur les équations différentielles.

4. Déterminer une base du noyau de $D_\alpha^2 - \alpha^2\mathrm{Id}_\alpha$, ainsi qu'une base de son image.

Problème 7

Etude de la suite logistique

Partie I — Généralités sur les suites définies par itération

Soit I un intervalle réel, et $f : I \to I$ une application. On définit une suite (u_n) d'éléments de I par :

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose : $I = [a, b]$ pour deux réels $a < b$ et f est une fonction de classe C^1.

Démontrer les assertions 1, 2, 3, 4 :

-1- Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire que l'on a $f(\ell) = \ell$.

-2- Si $|f'(\ell)| > 1$, démontrer que la suite (u_n) converge vers ℓ ssi $u_n = \ell$ à partir d'un certain rang.

-3- a) Si $|f'(\ell)| < 1$, démontrer que la suite (u_n) converge vers ℓ à condition de choisir u_0 dans un certain intervalle $J \subset [a, b]$.

-3- b) Il existe $k \in]0, 1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$.

-4- Si $|f'(\ell)| = 1$ on ne peut rien dire :

a) Pour $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $f : x \mapsto \sin x$, établir que $f'(0) = 1$ et la suite (u_n) converge vers 0.

b) Pour $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $f : x \mapsto x^2 + \ln(1+x)$, établir que 0 est le seul point fixe, $f'(0) = 1$ et (u_n) diverge vers $+\infty$.

-5- Dans cette question on suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ vérifiant :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leqslant k.$$

a) Démontrer que f admet un unique point fixe ℓ.

b) Démontrer que (u_n) converge vers ℓ, quel que soit la valeur de $u_0 \in [a, b]$.

ON POURRA UTILISER LIBREMENT LE LEMME DE CESARO :

Si une suite réelle (a_n) a pour limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite (b_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \ b_n = \dfrac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}$, a pour limite λ.

OU (AU CHOIX) LE LEMME DE L'ESCALIER :

Si une suite réelle (a_n) vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = \lambda$.

REM Ces résultats restent valables si l'on prend des suites complexes, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Partie II — Introduction à la suite logistique

On note $I = [0,1]$. Pour $a \in]0,4[$ on définit la fonction $f_a : x \mapsto a\,x\,(1-x)$. Soit enfin la suite (u_n) :

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f_a(u_n) = a\ u_n\,(1-u_n).$$

-6- Étudier les variations de f_a et justifier qu'elle laisse stable l'intervalle $I = [0,1]$.

La suite (u_n) est donc bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$

-7- Étudier les points fixes éventuels de f_a i.e. résoudre l'équation $f_a(x) = x$.

Partie III — Premier cas : $a \in]0,1[$

-8- Démontrer que dans ce cas la suite (u_n) converge vers 0.

-9- Si $u_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 1$:

a) Prouver que pour tout n, $u_n > 0$.

b) À l'aide du lemme de l'escalier, montrer que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (\ln a)\,n$.

c) Justifier que la série $\Sigma\, u_n$ converge.

d) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A\ a^n$.

Partie IV — Deuxième cas : $a = 1$

-10- Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

-11- Si $u_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 1$:

a) Prouver que pour tout n, $u_n \neq 0$.

b) Prouver qu'il existe un réel β (dont on donnera la valeur), tel que la suite $v_n = u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$ converge vers un réel non nul.

c) Appliquer le lemme de l'escalier, et donner un équivalent de u_n.

Problème 8

Un développement de la fonction tangente

Partie I Premier pas

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_{\tan}$ de la fonction tan : $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Préciser sa période.
2. Calculer la fonction dérivée, et représenter graphiquement la fonction sur l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Démontrer par récurrence l'existence de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\mathrm{T}_0(X) = X \;\; ; \;\; \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et tout } x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \quad \tan^{(n)}(x) = \mathrm{T}_n(\tan x)\,.$$

On explicitera la relation de récurrence vérifiée par les T_n.

4. Calculer les polynômes T_1, T_2, T_3.
5. Démontrer que les coefficients de T_n sont des entiers naturels, et que $\mathrm{d}^\circ\mathrm{T}_n = n+1$.
6. Appliquer soigneusement la formule de Taylor avec reste intégrale, et prouver qu'il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{T}_{2n+2}(\tan t)\,\mathrm{d}t$$

Partie II Fonction absolument monotone

Soit I un intervalle de la forme $]-\alpha, \alpha[$ où $\alpha > 0$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

— 1 — f est de classe $\mathscr{C}^\infty$,

— 2 — f est impaire,

— 3 — Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in [0, \alpha[$, $f^{(n)}(x) \geq 0$ (fonction absolument monotone).

Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on note :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

7. Soit $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, démontrer :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + R_{n+1}(x)$$

8. Soit un réel $b > 0$.
   a) Démontrer que la suite $\big(R_n(b)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   b) Pour $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier successivement :
      (i) $R_n(x) = \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(xu)\,(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$
      (ii) $0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(bu)\,(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$
      (iii) $0 \leq R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{b}\right)^n R_n(b)$

   c) En déduire que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$.

Partie III Application à la fonction tangente

9. Démontrer que pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\qquad \tan x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$.

À vos plumes !

Problème 9 Séries et intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$

Partie I Étude de la suite u_n

1. S'agit-il d'une intégrale définie ? d'une intégrale convergente ?

2. Calculer les intégrales u_0 et u_1.

3. (a) Calculer l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/3} \sin^n x \cos x\,\mathrm{d}x.$

   (b) Écrire $u_{n+2} - u_n$ comme une seule intégrale, et calculer cette intégrale.

   (c) Calculer l'intégrale u_3

4. Démontrer que la suite (u_n) est monotone. Peut-on affirmer que cette suite converge ?

5. (a) Déterminer un réel $C > 0$ vérifiant : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}],\ \ \sin x \leq C.$

   (b) Démontrer que, pour tout n, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3} C^n.$

   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie II Étude de la série de terme général u_n

6. Démontrer que la série de terme général u_n est une série convergente.

7. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\pi/3} \frac{1 - \sin^{n+1} x}{\cos x\,(1 - \sin x)}\,\mathrm{d}x$$

8. En déduire que la somme S de la série est égale à l'intégrale $I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x\,(1 - \sin x)}\,\mathrm{d}x.$

Partie III Étude de l'intégrale I

On note : $I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x\,(1 - \sin x)}\,\mathrm{d}x.$

9. S'agit-il d'une intégrale définie ? D'une intégrale convergente ?

10. Déterminer trois réels a, b, c vérifiant :

$$\forall u \notin \{\pm 1\},\ \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{a}{(1-u)^2} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{1+u}$$

11. En déduire la valeur de l'intégrale S.

On appliquera le changement de variable $u = \sin x$

À vos plumes !

Problème 10

Une urne contient a boules blanches et b boules noires, $N = a + b$. On tire successivement n boules **sans remise** : $n \leq a$, $n \leq b$.

NB — Lors de n tirages successifs **indépendants**, tous de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, par exemple n tirages avec remise d'une boule de l'urne U, la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Ici les tirage se déroulant sans remise : **ils ne sont pas indépendants**. Nous allons déterminer la loi de cette variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues, appelée loi hypergéométrique (ce n'est pas du tout une loi binomiale).

A- La loi hypergéométrique

4) L'univers Ω est l'ensemble des listes de n éléments distincts tirés dans l'urne U. Établir que le cardinal de Ω est

$$N\,(N-1)\ldots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!} = n!\binom{N}{n}.$$

5) Soit un entier $k \in [\![0, n]\!]$, établir que le cardinal de l'événement $(X = k)$ est donné par la formule :

$$\binom{n}{k} \cdot a\,(a-1)\ldots(a-k+1) \cdot b\,(b-1)\ldots(b-(n-k)+1).$$

***Indication** : il y a $\binom{n}{k}$ choix pour les emplacements des k boules blanches*

6) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P[X = k] = \dfrac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

7) En déduire une expression simple pour la somme (dite de Vandermonde) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

B- Calcul de l'espérance

On note X_k la v.a. de Bernoulli égale à 1 si le k-ième tirage amène une boule blanche.

8) Démontrer que pour X_1 le paramètre est $p = \frac{a}{a+b}$.

9) Démontrer que pour $k \geq 2$, le paramètre de X_k est encore $p = \frac{a}{a+b}$ (le calcul est très différent, mais il se simplifie pour donner le même résultat).

10) En déduire l'espérance de X, en remarquant que $X = \sum X_i$.

11) Les variables X_k sont-elles indépendantes ?

C- Calcul de la variance

12) Pour tout $i \neq j$ expliquer pourquoi la variable aléatoire $Y = X_i X_j$ est une variable de Bernoulli.

13) Montrer qu'on a $P[X_i X_j = 1] = \dfrac{a\,(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$.

14) En déduire $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$, puis la variance de X.

Problème 11

On effectue des tirages successifs avec remise (un individu à la fois) dans une population de N individus notés $a_1, \ldots, a_N$. Parmi eux on distingue les individus $a_1, \ldots, a_r$.

On étudie la v.a. X_r égale au nombre de tirages pour que les individus $a_1, \ldots, a_r$ aient tous été tirés au moins une fois.

(1) On prend dans cette question $r = 1$.

Déterminer la loi de X_1 et donner son espérance et sa variance.

(2) ***(a)*** Donner l'ensemble des valeurs $X_r(\Omega)$ prises par la fonction X_r .

(b) Calculer $P[X_r = r]$.

(3) On se propose de calculer $P[X_r = r+1]$. On note A l'événement $(X_r = r+1)$, et A_0 l'événement : « il faut $r+1$ tirages pour obtenir les individus $a_1, \ldots, a_r$ au moins une fois ET la première apparition de a_i précède toujours la première apparition de a_{i+1} ».

(a) Exprimer $P[A]$ en fonction de $P[A_0]$.

(b) A_0 est réalisé lorsque les $r+1$ tirages ont amené $a_1, \ldots, a_r$ ainsi qu'un individu b (exactement $r+1$ individus ont été tirés).

Justifier que b peut être l'un quelconque des individus $a_1, \ldots, a_N$ à l'exception de a_r .

(c) Soit $A_{0,1}$ l'événement : « A_0 est réalisé et b est l'un des individus $a_{r+1}, \ldots, a_N$ à l'exception de a_r ».

Calculer $P[A_{0,1}]$.

(d) Soit $A_{0,2}$ l'événement : « A_0 est réalisé et b est l'un des individus $a_1, \ldots, a_{r-1}$ ».

Calculer $P[A_{0,2}]$.

(e) En déduire : $P[A] = \dfrac{r!}{2N^{r+1}} \cdot r(2N - r - 1)$.

(4) On cherche l'espérance et la variance de la v.a. X_r . On note T_i la v.a. au nombre de tirages nécessaires pour que i individus distincts parmi $a_1, \ldots, a_r$ aient été tirés ».

On pose $U_1 = T_1$ et $U_i = T_i - T_{i-1}$ $(2 \leqslant i \leqslant r)$.

(a) Interpréter les v.a. U_i . <u>Nous admettrons leur indépendance</u>.

(b) ***(b - i)*** Reconnaitre la loi de U_i .

(b - ii) Donner $\mathrm{E}[U_i]$ et $\mathrm{V}[U_i]$.

(b - iii) Déduire de ce qui précède l'expression de $\mathrm{E}[X_r]$ et $\mathrm{V}[X_r]$ en fonction des sommes

$$S_i = \sum_{k=1}^{r} k^i.$$

(b - iv) Obtenir un équivalent de ces deux expressions.

À vos plumes !

Problème d'algèbre générale

Autour de l'irrationalité

Partie I — Généralités sur $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ et $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$

On note $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{Q}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

-1- Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ et $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ sont stables par addition, et par multiplication.

-2- Démontrer que si $\omega \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ et $\omega \neq 0$, alors $\frac{1}{\omega} \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$.

Partie II — Étude d'une suite d'intégrales

-3- Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!} \, \mathrm{e}^{tz} \, \mathrm{d}t$.

(a) Calculer $I_0(z)$.

(b) À l'aide de deux intégrations par parties, calculer $I_1(z)$.

(c) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2}(z) = -\frac{4n+6}{z^2} I_{n+1}(z) + \frac{4}{z^2} I_n(z)$.

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'un polynôme A_n à coefficients entiers, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$I_n(z) = \frac{\mathrm{e}^z A_n(z) - \mathrm{e}^{-z} A_n(-z)}{z^{2n+1}} .$$

(e) Préciser le degré et le coefficient dominant de A_n.

Partie III — Un théorème d'irrationalité

On veut démontrer le théorème suivant :

> *Il n'existe aucun complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z appartiennent tous les deux à l'anneau $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$.*

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z appartiennent tous les deux dans $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$.

-4- (a) Montrer l'existence d'un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k^n I_n(z) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

On note $z = \frac{A}{m}$ où $A \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $m^n A_n(z) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$

(b) Démontrer que la suite $\left(k^n I_n(z)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Majorer $|I_n(z)|$ par une expression de la forme $\frac{K}{n!}$ où K est une constante réelle

(c) En déduire que cette suite est nulle à partir d'un certain rang.

À vos plumes !

-5- On note $z = x + \mathrm{i}y$ $(x, y \in \mathbb{Q})$. On choisit $\delta > 0$ tel que $|y| \leqslant \frac{\pi}{3\delta}$.

(a) Démontrer que pour tout $n \geqslant n_0$, alors $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\, \cos(yt)\, \mathrm{d}t = 0$.

Prendre la partie réelle dans $I_n(z) = 0$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_0^\delta (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\, \cos(yt)\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2\,(n+1)}$.

Minorer $\operatorname{ch}(xt)$ *par 1,* $\cos(yt)$ *par* $\frac{1}{2}$*, et* $1-t^2$ *par* $1-t$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\, \cos(yt)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x)$.

Majorer $\operatorname{ch}(xt)$ *par* $\operatorname{ch}(x)$*,* $\cos(yt)$ *par* 1*, et* $(1-t^2)^n$ *par* $(1-\delta)^n$.

(d) Obtenir une contradiction.

Faire tendre n *vers* $+\infty$

Partie IV — Quelques preuves d'irrationalité

-6- (a) Démontrer que π est irrationnel.

(b) Montrer que e et e^2 sont irrationnels. Généraliser.

(c) Montrer que $\ln 2$, $\ln 3$ sont irrationnels. Généraliser.

Problème d'algèbre linéaire

Matrices de trace nulle

On adopte ici quelques notation propres à ce sujet.

- $\text{can} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de K^n. Conformément au programme on identifie K^n et $\mathrm{M}_{n,1}(K)$
- Nous noterons $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_n(K)$.

et on rappelle la notation $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ pour la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les a_i

- Nous noterons M_n au lieu de $\mathrm{M}_n(K)$.
- Nous noterons M_n^0 l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 0.
- Nous noterons $M_n^{t=0}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n$ vérifiant $\mathrm{tr}\, M = 0$.
- Nous dirons qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n$ est de la forme (S), si :

$$\exists A, B \in \mathrm{M}_n \text{ t.q. } \quad M = AB - BA.$$

PARTIE 1 Homothéties

1-1 Montrer que si f est une homothétie, i.e. si f est de la forme $f = \lambda\, \mathrm{Id}_E$ alors :

pour tout vecteur $x \in K^n$, la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée

1-2 Réciproque

On suppose dans cette question que pour tout $x \in K^n$, la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée.

(a) Justifier que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\exists \lambda_i \in K,\ f(e_i) = \lambda_i\, e_i$.

(b) Soit alors $j \in \{2,\ldots,n\}$, justifier qu'il existe $\mu \in K$, tel que $f(e_1+e_j) = \mu \cdot (e_1+e_j)$.

(c) Prouver que $\mu = \lambda_1 = \lambda_j$ et en déduire que f est une homothétie.

PARTIE 2 Étude des espaces $\mathscr{D}_n$, M_n^0 , $M_n^{t=0}$

2-1 Dimensions

(a) Rappeler la dimension de M_n (comme $K-$e.v.).

(b) Montrer que $\mathscr{D}_n$ est un s.e.v. de M_n et en donner la dimension et une base.

(c) Procéder de même pour M_n^0 : on obtient une base votée $\underline{b}_1$.

(d) On rappelle que la trace est une forme linéaire non nulle sur M_n , en déduire que $M_n^{t=0}$ est un s.e.v. de M_n et en donner la dimension.

2-2 Complétion des bases

On remarque que $M_n^0 \subset M_n^{t=0}$ d'où le fait que M_n^0 est un s.e.v. de $M_n^{t=0}$.

(a) Déterminer le nombre de vecteurs nécessaires pour compléter la base $\underline{b}_1$ trouvée au 2-1-c, en une base de $M_n^{t=0}$ et donner des vecteurs qui conviennent effectivement. On obtient ainsi une base $\underline{b}_2$ de $M_n^{t=0}$.

(b) Compléter $\underline{b}_2$ en une base de M_n.

PARTIE 3 Espace M_n^0 et forme (S)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. On définit l'endomorphisme $\mathscr{L}$ de M_n :

$$\mathscr{L} : \quad \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_n \quad , \quad M \mapsto A_n M - M A_n$$

À vos plumes !

3-1 Déterminer soigneusement, pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathscr{L}(E_{i,j})$.

3-2 Image et noyau de $\mathscr{L}$

3-2-1 À l'aide de la question précédente, justifier que $\mathrm{Im}\,\mathscr{L} = M_n^0$. En déduire le rang de $\mathscr{L}$.

3-2-2 Soit une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{M}_n$.

(a) On note $c_{i,j}$ le coefficient général de la matrice $A_n M$. Exprimer $c_{i,j}$ en fonction de $m_{i,j}$.

(b) On note $d_{i,j}$ le coefficient général de la matrice MA_n. Exprimer $d_{i,j}$ en fonction de $m_{i,j}$.

(c) En déduire : $\ker \mathscr{L} = \mathscr{D}_n$.

3-2-3 Démontrer que $\mathrm{M}_n = \ker \mathscr{L} \oplus \mathrm{Im}\,\mathscr{L}$.

3-3 En déduire que pour toute matrice $M \in M_n^0$, il existe une et une seule matrice $B \in M_n^0$ telle que

$$M = A_n B - BA_n$$

PARTIE 4 Espaces M_n^0 et $M_n^{t=0}$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion :

(H_n) : *pour toute matrice* $M \in M_n^{t=0}$, *il existe* $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, *telle que* $P^{-1}MP \in M_n^0$

4-1 Montrer que l'assertion (H_1) est vraie.

Prenons $n \geqslant 2$ et supposons (H_{n-1}) vérifiée. Essayons d'en déduire que (H_n) est vraie.

4-2 Que dire pour $M = 0$?

Désormais on prend $M \neq 0$ et on note u l'endomorphisme de K^n de matrice M dans la base canonique.

4-3 Construction d'une base

4-3-1 Peut-on avoir $u = \lambda \mathrm{Id}$ où $\lambda \in K$?

4-3-2 Prouver l'existence d'un vecteur non nul $x_1 \in K^n$ tel que la famille $\left(x_1, f(x_1)\right)$ soit libre.

4-3-3 Posons $x_2 = u(x_1)$, justifier l'existence de $n-2$ vecteurs $x_3, \ldots, x_n$ tels que la famille $\underline{b} = (x_1, \ldots, x_n)$ est une base de K^n.

4-4 Changement de base

4-4-1 Que vaut la première colonne de la matrice $M' = \mathrm{Mat}_{\underline{b}}(u)$?

4-4-2 On note P_1 la matrice de passage de la base canonique can à la base $\underline{b}$, écrire la formule de changement de base, et donner une relation entre P_1, M, M'.

On écrit par blocs $M' = \begin{pmatrix} 0 & U \\ V & W \end{pmatrix}$ où $U \in \mathrm{M}_{1,n-1}(K)$ (ligne), $V \in \mathrm{M}_{n-1,1}(K)$ (colonne), $W \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$.

4-5 Prouver que $M' \in M_n^{t=0}$. En déduire que $W \in M_{n-1}^{t=0}$ et qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ telle que

$$Q^{-1}WQ \in M_{n-1}^0.$$

4-6 Une matrice de passage

On pose $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ et pour $Z \in \mathrm{M}_n$ on écrit $Z = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $a \in K$ et $D \in \mathrm{M}_{n-1}$.

4-6-1 Donner des relations vérifiées par a, B, C, D pour que l'on ait $P_2 \cdot Z = Z \cdot P_2 = I_n$.

4-6-2 En déduire que la matrice P_2 est inversible et préciser son inverse (écrite par blocs).

4-7 Conclusion

4-7-1 On note $P = P_1 P_2$, montrer que $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $P^{-1}MP \in M_n^0$.

4-7-2 Qu'a-t-on montré dans cette partie ?

À vos plumes !

PARTIE 5 Résultat principal

Soit M' une matrice de la forme (S) :

$$M' = A'B' - B'A'.$$

Soit M une matrice semblable à M' :

$$M = PM'P^{-1} \text{ où } P \in \mathrm{GL}_n(K)$$

5-1 Une implication

5-1-1 Montrer que sous nos hypothèses, M s'écrit aussi sous la forme (S) : $M = AB - BA$.

5-1-2 Montrer que si $M \in M_n^{t=0}$ alors M est de la forme (S).

5-2 Cas particulier

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit u l'endomorphisme de K^3 canoniquement associé à M.

5-2-1 Trouver une base $\underline{b} = (x_1, x_2, x_3)$ de K^3 telle que $\mathrm{Mat}_{\underline{b}}(u) \in M_3^0$.

5-2-2 Exhiber alors deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_3$ telles que $M = AB - BA$.

5-3 Cas général

5-3-1 Montrer que si M est de la forme (S) alors $M \in M_n^{t=0}$.

5-3-2 Conclure et justifier :

$$M \text{ est de la forme (S) ssi } M \in M_n^{t=0}$$

FIN

À vos plumes !

Problème d'algèbre euclidienne

Polynômes de Legendre

On désigne par I l'intervalle $[-1,1]$. Pour tout $p\in\mathbb{N}$ on note $\mathscr{C}^p(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^p sur I, et $\mathscr{C}^p(I)$ celui des fonctions C^∞ sur I.
On notera $\mathscr{L}$ l'opérateur de Legendre, c'est-à-dire l'application :

$$\mathscr{C}^2(I) \longrightarrow \mathscr{C}^0(I),\quad f \mapsto \mathscr{L}(f) \quad \text{où}$$

$\mathscr{L}(f)$ est la fonction $I \to \mathbb{R}$:

$$x \ \mapsto\ \mathscr{L}(f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)f'(x)\right] = 2xf'(x) + (x^2-1)f''(x).$$

On définit aussi l'application $\widetilde{\mathscr{L}} : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par :

$$\widetilde{\mathscr{L}}(P) = 2X\,P' + (X^2-1)\,P''.$$

Enfin, on identifie polynôme et fonction polynôme. Alors $\widetilde{\mathscr{L}}$ est simplement la restriction de $\mathscr{L}$ à $\mathbb{R}[X]$.

PRELIMINAIRES

On considère les polynômes $U_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = \dfrac{1}{2^n\, n!}\,\dfrac{\mathrm{d}^n U_n}{\mathrm{d}x^n}$, avec $U_0 = P_0 = 1$.

1. Démontrer que les fonctions P_{2k} sont paires, et que les P_{2k+1} sont impaires.
2. Calculer le réel a_n égal au coefficient dominant de P_n.
3. Écrire la formule de Leibniz pour calculer : $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(X-1)^n\,(X+1)^n\right]$. En prenant la valeur en 1, démontrer que $P_n(1)=1$.
4. Calculer les polynômes P_1 et P_2.

PARTIE I « Valeurs propres » de l'endomorphisme de Legendre

Dans cette partie on étudie l'action de $\mathscr{L}$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{P} = \mathbb{R}[X]$. On identifie polynôme et fonction polynôme. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note : $\mathscr{P}_n = \mathbb{R}_n[X] = \{P\in\mathscr{P} : \mathrm{d}^\circ P \le n\}$.

5. Démontrer que $\mathscr{L}$ est une application linéaire.
6. Montrer que si un polynôme P appartient à $\mathscr{P}_n$, alors le polynôme $\mathscr{L}(P)$ appartient à $\mathscr{P}_n$.

   Ainsi, $\mathscr{L}$ induit un endomorphisme $\mathscr{L}_n : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$, $f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)f'(x)\right] = 2xf'(x) + (x^2-1)f''(x)$
7. Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathscr{L}(X^k)$.
   En déduire la matrice L_n de l'endomorphisme $\mathscr{L}_n$ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

Une « valeur propre » de l'endomorphisme $\mathscr{L}_n$ est un scalaire λ vérifiant : $\exists P \in \mathbb{R}_n[X],\ P \ne 0$ **et** $\mathscr{L}_n(P) = \lambda P$.

8. Déterminer, grâce à la matrice L_n, toutes les valeurs propres de $\mathscr{L}_n$
9. En déduire l'ensemble des scalaires λ vérifiant : $\exists P \in \mathbb{R}[X],\ P \ne 0$ et $\widetilde{\mathscr{L}}(P) = \lambda P$.

Ces valeurs λ sont les « valeurs propres » de l'endomorphisme $\widetilde{\mathscr{L}}$

À vos plumes !

PARTIE II « Vecteurs propres » de l'endomorphisme de Legendre

10. a) Vérifier les relations :

$$(1)\quad U'_{n+1}(x) - 2(n+1)\,x\,U_n(x) = 0 \qquad\qquad (2)\quad (x^2-1)\,U'_n(x) - 2n\,x\,U_n(x) = 0$$

b) Dériver $n+1$ fois les relations (1) et (2). En déduire que les polynômes P_n vérifient :

$$(3)\quad P'_{n+1}(x) = x\,P'_n(x) + (n+1)\,P_n(x) \qquad\qquad (4)\quad \mathscr{L}(P_n) = n(n+1)\,P_n$$

11. En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$ vérifiant : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathscr{L}}(P) = \lambda P$.

Ces polynômes P s'appellent les « vecteurs propres » de l'endomorphisme $\widetilde{\mathscr{L}}$

PARTIE III Distance d'une fonction continue au s.e.v. $\mathscr{P}_n$

Pour f, g dans $\mathscr{C}_0(I)$ on pose $(f\,|\,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

12. Démontrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{C}_0(I)$. *On notera* $\|f\| = \sqrt{(f\,|\,f)}$.

13. a) Démontrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ on a : $\big(\mathscr{L}(P_n)\,|\,P_m\big) = \big(P_n\,|\,\mathscr{L}(P_m)\big)$.

b) En déduire que la famille (P_n) est orthogonale, i.e. : $m < n \Rightarrow \big(P_n\,|\,P_m\big) = 0$.

14. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$

15. En intégrant par parties, établir : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\mathrm{d}x = 2 - 2\int_{-1}^{1} x\,P'_n(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x.$

16. En déduire : $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

La famille $(\tilde{P}_n)$ définie par : $\tilde{P}_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\,P_n$ est donc une famille orthonormée.

17. Soit $P \in \mathscr{P}_n$, décomposer P sur la base orthonormée $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n)$, et en déduire :

$$\|\mathscr{L}_n(P)\| \leq n(n+1).$$

Établir enfin : $\sup\big\{\|\mathscr{L}_n(P)\| \ / \ \|P\| = 1\big\} = n(n+1)$.

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(I)$, on note $\mathrm{d}_n(f)$ la distance de f au s.e.v. $\mathscr{P}_n$.

18. Exprimer le projeté orthogonal $p_n(f)$ de f sur le s.e.v. $\mathscr{P}_n$ à l'aide des réels

$$c_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\tilde{P}_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

19. Justifier : $d_n(f)^2 = \|f\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2.$

20. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0$

À vos plumes !

Problème de synthèse

Valeurs de la fonction Zeta aux entiers pairs

Partie I - Etude d'une application linéaire (40min)

Dans tout le problème, on se place dans $\mathbb{R}[X]$.
On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto \varphi(P)$ où $\varphi(P)$ est le polynôme Q ci-dessous :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x t\,P(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

On écrit parfois :

$$Q(X) = \int_0^X t\,P(t)\,\mathrm{d}t - X\int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t + \frac{X^2}{2}\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que pour tout réel x, $Q'(x) = x\int_0^1 P(t)dt - \int_0^x P(t)dt$. (cf question de cours (A))
2. En déduire $Q''(x)$.
3. Calculer $Q(0)$, $Q'(0)$ et $Q'(1)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note e_n la fonction polynôme $x \mapsto x^n$.
   Calculer $\varphi(e_n)(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
5. **Démontrer que l'application φ est linéaire.** (on pourra l'admettre pour la suite)
6. En déduire que si $P = a_0e_0 + \ldots + a_ne_n$ est une fonction polynôme à coefficients rationnels (i.e. $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$), alors la fonction $\varphi(P)$ est une fonction polynôme à coefficients rationnels.

Partie II - Etude d'une suite de fonctions polynômes (45min)

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynômes définie par récurrence par :

- Pour tout réel x, $P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$
- Pour tout entier naturel $n \geq 2$: $P_n = \varphi(P_{n-1})$.

7. Calculer $P_2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
8. Prouver que pour tout entier $n \geq 2$, $P_n''(x) = \int_0^1 P_{n-1}(t)dt - P_{n-1}(x)$.

Soit k un entier naturel fixé, $k \neq 0$, et soit $u_n(k) = \int_0^1 P_n(t)\,\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

9. Intégrer par parties dans cette intégrale et démontrer : $u_n(k) = -\frac{1}{k\pi}\int_0^1 P_n'(t)\,\sin(k\pi t)\,\mathrm{d}t$
10. Intégrer de nouveau par parties et démontrer : $u_n(k) = \frac{1}{(k\pi)^2}\,u_{n-1}(k)$.
11. Calculer les intégrales $I = \int_0^1 t\,\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^1 t^2\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$ (par parties).
    En déduire $u_1(k)$.
12. Exprimer enfin $u_n(k)$ en fonction de k et de n.

À vos plumes !

Partie III - Prolongement d'une fonction (25min)

Soit θ la fonction définie sur l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}]$ par $\boxed{\theta(t)=\frac{t}{\sin t}}$.

13. Démontrer que la fonction θ admet un prolongement continu, et dérivable, en zéro. On le notera $\tilde{\theta}$.

14. Justifier que la fonction $\tilde{\theta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

15. On note maintenant g_n la fonction définie pour tout $x\in]0,1]$, par $\boxed{g_n(x)=\frac{P_n(x)}{\sin(\frac{\pi}{2}x)}}$.

    Justifier l'existence d'un polynôme Q_n vérifiant $P_n(X) = X\,Q_n(X)$.

    Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de la fonction θ et du polynôme Q_n. En déduire que g_n admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On le notera $\tilde{g}_n$.

Partie IV - Le lemme de Riemann-Lebesgue (20min)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe C^1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I(\lambda) = \int_0^1 f(t)\,\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t.$$

16. Intégrer par parties dans l'intégrale $I(\lambda)$, en dérivant g. On obtient :

$$I(\lambda) = \frac{f(0) - f(1)\,\cos\lambda}{\lambda} + J(\lambda)$$

où $J(\lambda)$ est une intégrale que l'on précisera clairement.

17. Écrire l'inégalité de la moyenne pour l'intégrale $J(\lambda)$. En déduire : $\lim_{\lambda\to+\infty} J(\lambda) = 0$.

18. Démontrer enfin : $\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = 0$.

Partie V - Utilisation d'une formule de trigonométrie (10min)

19. Soit N un entier naturel non nul, et soit un réel $t\in]0,1]$. Établir :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(n\pi t) = \frac{\sin(2N+1)\frac{\pi t}{2}}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}.$$

On pourra multiplier le membre de gauche par $\sin\frac{\pi t}{2}$.

Puis, utiliser la transformation d'un produit de la forme $\sin a\ \cos b$ en une somme faisant intervenir $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$. Vous obtiendrez une somme télescopique.

À vos plumes !

Partie VI - Expression intégrale de la somme partielle (10min)

20. Utiliser le résultat de la partie V pour établir :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k\pi)^{2n}} = \sum_{k=1}^{N} u_n(k) = \frac{1}{2}\int_0^1 \tilde{g}_n(t)\ \sin[(m+\tfrac{1}{2})\pi t]\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie VII - Séries de Riemann d'exposant pair (20min)

21. Utiliser ce qui précède pour démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, la suite $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}}$ converge et a pour limite (on dit pour « somme ») :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt\,.$$

22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt$. Démontrer que r_n est un nombre rationnel.

23. Calculer r_1 et r_2.

24. Qu'a-t-on démontré dans cette dernière partie ?

À vos plumes !