

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\frac{32}{40}$

c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$

d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

b) $\frac{2}{3} - 0,2$

d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$

Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$

b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

d) $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$

c) $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$

b) $\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$

d) $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux.
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{c}$ avec $b < c$.

- a) $\frac{29}{6}$ b) $\frac{k}{k-1}$... c) $\frac{3x-1}{x-2}$..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 1.11 — Produit en croix.

Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ?

Calcul 1.12 — Produit en croix.

On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$	c) $\frac{10^5}{10^3}$	e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$
b) $(10^5)^3$	d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$	f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$

Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$	c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$	e) $\frac{6^5}{2^5}$
b) $(5^3)^{-2}$	d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$	f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$

Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$	c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$
b) $2^{21} + 2^{22}$	d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$

Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$	c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$
b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$	d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$

Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$	c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$
b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$	d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

Prérequis

Les identités remarquables !

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$

d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$

b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$

e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$

f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$

b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$

c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$

e) $(x^2+\sqrt{2}x+1)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$

f) $(x^2+x+1)^2$

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$

b) $25 - (10x+3)^2$

c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$

d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ (où $a \neq 0$).

a) $x^2 - 2x + 1$

d) $3x^2 + 7x + 1$

b) $x^2 + 4x + 4$

e) $2x^2 + 3x - 28$

c) $x^2 + 3x + 2$

f) $-5x^2 + 6x - 1$

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x + y)^2 - z^2$

d) $xy - x - y + 1$

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$..

c) $xy + x + y + 1$

f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $x^4 - 1$

b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$

c) $x^4 + x^2 + 1$

d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

f) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

g) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

Calcul 4.4



Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.



On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \frac{1}{f(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	d) $\frac{f'(x)}{f(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	e) $f(x) + 4f''(x) \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{x+2f(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	f) $\frac{f(x)}{f''(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$

Calcul 4.6 — Mettre au carré.



Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
--	----------------------------	--	----------------------------

Calcul 4.7 — Méli-mélo.



Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	f) $\frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$

Calcul 4.8



Simplifier $\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$.

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A . $\dots\dots\dots \boxed{}$

Expressions algébriques

Prérequis

Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a + 2)^3$

c) a^{12}

b) $a^5 - a^6$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + iy$ où x, y sont deux réels.

a) $(3 + i)^2$

c) $(3 - i)^3$

b) $(3 - i)^2$

d) $(3 - 2i)^3$

Calcul 5.3



Même exercice.

a) $(4 - 5i)(6 + 3i)$

c) $(-4 + i\sqrt{5})^3$

b) $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$

d) $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$

c) $\prod_{k=0}^{1234} a^k$

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$

e) $\sum_{k=1}^{99} a^k$

f) $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.



Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \frac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

c) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

Calcul 5.6 — Trois variables.



Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$

b) $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$

c) $x^3 + y^3 + z^3$

d) $(x + y)(y + z)(z + x)$

e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$

f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$

Calcul 5.7



Même exercice.

a) $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$

b) $x^4 + y^4 + z^4$

c) $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)}$

d) $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)}$

e) $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)}$

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

- | | | | |
|------------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ | <input type="text"/> | f) $2x^2 + 3x = 0$ | <input type="text"/> |
| b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ | <input type="text"/> | g) $2x^2 + 3 = 0$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ | <input type="text"/> | h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ | <input type="text"/> |
| d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ | <input type="text"/> | i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ | <input type="text"/> |
| e) $x^2 - 5x = 0$ | <input type="text"/> | j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ | <input type="text"/> |

Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

- | | | | |
|-------------------------------|----------------------|--------------------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ | <input type="text"/> | d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ | <input type="text"/> | e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ | <input type="text"/> | f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ | <input type="text"/> |

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine | <input type="text"/> |
| b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine | <input type="text"/> |
| c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine | <input type="text"/> |
| d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine | <input type="text"/> |

Calcul 6.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a) $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$
- b) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$
- c) $(x+a)(x+b) = (m+a)(m+b)$
- d) $(b-c)x^2 + (c-a)mx + (a-b)m^2 = 0$
- e) $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$
- f) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13
- b) -11 et 17
- c) $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$
- d) $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}$
- e) $m + 3$ et $\frac{2m-5}{2}$
- f) $\frac{m+1}{m}$ et $\frac{m-2}{m}$

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$
- b) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$
- c) $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$

b) $-x^2 + 2x + 15$

c) $(x + 1)(3x - 2)$

d) $\frac{x - 4}{2x + 1}$