

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — bis.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Calcul 9.5 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2\sin(x) + 3}$

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$

Opérations et fonctions composées**Calcul 9.6**

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Primitives

Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\frac{1}{t+1}$		c) $\frac{3}{(t+2)^3}$	
b) $\frac{3}{(t+2)^2}$		d) $\sin(4t)$	

Calcul 10.2



Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$		c) $\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$	
b) e^{2t+1}		d) $\frac{1}{1+9t^2}$	

Utilisation des formulaires

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\frac{2t^2}{1+t^3}$		d) $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$	
b) $t\sqrt{1+2t^2}$		e) $\frac{t}{1+3t^2}$	
c) $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$		f) $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$	

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – bis.



Même exercice.

a) $\frac{\ln^3 t}{t}$		d) $\frac{1}{t^2 \sqrt{t}}$	
b) $\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$		e) $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$	
c) $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$		f) $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$	

Calcul 10.5 — Trigonométrie.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\cos^2 t \sin t$ | g) $\tan^2 t$ | l) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3}$ |
| b) $\cos(t)e^{\sin t}$ | h) $\tan^3 t$ | m) $\frac{1}{1 + 4t^2}$ |
| c) $\tan t$ | i) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ | n) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ |
| d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t}$ | j) $\frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ | o) $\frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1 - t^2}}$ |
| e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ | k) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t}$ | p) $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2} \text{Arcsin}(t)}$ |
| f) $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ | | |

Calcul 10.6 — Trigonométrie – bis.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

- | | | |
|----------------------------|--|--|
| a) $\cos^2 t$ | d) $\frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$ | f) $\frac{1}{\sin^2(t) \cos^2(t)}$ |
| b) $\cos(t) \sin(3t)$ | e) $\frac{1}{\sin t \cos t}$ | g) $\frac{1}{\sin(4t)}$ |
| c) $\sin^3 t$ | | |

Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $\frac{t^2 + t + 1}{t^2}$ | d) $\frac{t^3 + 1}{t + 1}$ | g) $\frac{t - 1}{t^2 + 1}$ |
| b) $\frac{t^2 + 1}{t^3}$ | e) $\frac{t - 1}{t + 1}$ | h) $\frac{t}{(t + 1)^2}$ |
| c) $\frac{1 - t^6}{1 - t^2}$ | f) $\frac{t^3}{t + 1}$ | |

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) $t^2 - 2t + 5$ | e) $e^{2t} + e^{-3t}$ |
| b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ | f) e^{3t-2} |
| c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3}$ | g) $\frac{t^2}{t^3 - 1}$ |
| d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}}$ | h) $\frac{3t - 1}{t^2 + 1}$ |

i) $\sin(t) \cos^2(t) \dots$

j) $\sinh(t) \cosh(t) \dots$

k) $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} \dots$

l) $\frac{e^t}{2 + e^t} \dots$

m) $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t} \dots$

n) $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \dots$

o) $\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t} \dots$

p) $te^{-t^2} \dots$

q) $\frac{1 - \ln t}{t} \dots$

r) $\frac{1}{t \ln t} \dots$

s) $\frac{\sin(\ln t)}{t} \dots$

t) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots$

Calcul 10.9 — *Bis repetita.*



Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Calcul d'intégrales

Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon sens ».

Calcul 11.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$. b) $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$ c) $\int_0^{-1} \sin x dx$...

Calcul 11.2



En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 7 dx$ c) $\int_0^7 3x dx$ e) $\int_{-2}^2 \sin x dx$
 b) $\int_7^{-3} -5 dx$ d) $\int_2^8 1 - 2x dx$.. f) $\int_{-2}^1 |x| dx$

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, que l'on note $\left[F(x)\right]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^3 2 dx$ d) $\int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 dx$
 b) $\int_1^3 2x - 5 dx$ e) $\int_0^1 x^5 - x^4 dx$
 c) $\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 dx$ f) $\int_1^{-1} x^{100} dx$

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.



Calculer.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$... c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ e) $\int_{-3}^2 e^x dx$
 b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$... d) $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$... f) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax + b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^2 (2x + 1)^3 dx$

b) $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2}$

d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$

e) $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$

f) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$

Calcul 11.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2 + 1) dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx$

e) $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$

f) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$

Calcul 11.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

b) $\int_{-2}^3 |x+1| dx$

c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$

d) $\int_1^e \frac{3x-2\ln x}{x} dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx$

f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| dx$

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Arcsin} x dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

c) $\int_0^2 10^x dx$

d) $\int_0^1 \operatorname{ch} x dx$

e) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

f) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx$