

Sommes et produits

Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Si q est un nombre réel et si $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $m \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=m}^n k &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} & \bullet \sum_{k=1}^n k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \bullet \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{k=m}^n q^k &= \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 18.1



Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^{n+2} n & \dots\dots\dots \boxed{} & \text{c) } \sum_{k=1}^n (3k+n-1) & \dots\dots\dots \boxed{} \\ \text{b) } \sum_{k=2}^{n+2} 7k & \dots\dots\dots \boxed{} & \text{d) } \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3} \right) & \dots\dots\dots \boxed{} \end{aligned}$$

Calcul 18.2



Même exercice.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^n k(k+1) & \dots\dots\dots \boxed{} & \text{d) } \sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k} & \dots\dots\dots \boxed{} \\ \text{b) } \sum_{k=0}^n (4k(k^2+2)) & \dots\dots\dots \boxed{} & \text{e) } \sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2) & \dots\dots\dots \boxed{} \\ \text{c) } \sum_{k=2}^{n-1} 3^k & \dots\dots\dots \boxed{} & \text{f) } \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} & \dots\dots\dots \boxed{} \end{aligned}$$

Calcul 18.3 — Produits.



Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tel que $p \geq q$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \prod_{k=p}^q 2 & \dots\dots\dots \boxed{} & \text{c) } \prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k & \dots\dots\dots \boxed{} \\ \text{b) } \prod_{k=1}^n 3^k & \dots\dots\dots \boxed{} & \text{d) } \prod_{k=-10}^{10} k & \dots\dots\dots \boxed{} \end{aligned}$$

Changements d'indice

Calcul 18.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

- a) $\sum_{k=1}^n n+1-k$ avec $j = n+1-k$
- b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$
- c) $\sum_{k=1}^n k2^k$ avec $j = k-1$
- d) $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$

Sommes télescopiques, produits télescopiques

Calcul 18.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$
- c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
- b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
- d) $\sum_{k=1}^n k \times k!$

Calcul 18.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

- a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$
- c) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
- b) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$
- d) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Décomposition en éléments simples

Calcul 18.7

Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
- b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

Sommation par paquets

Calcul 18.8

Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$
- b) $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$

Sommes doubles

Calcul 18.9

Calculer les sommes doubles suivantes.

- a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$
- b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
- c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$
- d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2$
- e) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$
- f) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$

Coefficients binomiaux

Prérequis

Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et coefficients binomiaux

Calcul 19.1 — Pour s'échauffer.



Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\frac{101!}{99!}$

d) $\binom{6}{2}$

b) $\frac{10!}{7!}$

e) $\binom{8}{3}$

c) $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$

f) $4 \times \binom{7}{4}$

Calcul 19.2 — Pour s'échauffer - bis.



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, coefficients binomiaux et le cas échéant à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$

b) $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$...

Calcul 19.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\binom{n}{2}$ (pour $n \geq 2$)

d) $\frac{(n+2)!}{n!}$

b) $\binom{n}{3}$ (pour $n \geq 3$)

e) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$

c) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

f) $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$

Calcul 19.4 — Avec des paramètres - bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$

b) $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$

Autour du binôme de Newton

Calcul 19.5 — Le binôme de Newton.

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$

d) $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 19.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$

b) Calculer $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$

Calcul 19.7

En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$

d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$

Calcul 19.8

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$

b) Donner-en une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$

c) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$