

Exponentielles

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $e^{3 \ln 2}$ | <input type="text"/> | d) $e^{-2 \ln 3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\ln(\sqrt{e})$ | <input type="text"/> | e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ | <input type="text"/> | f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$ | <input type="text"/> | d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{-\ln \ln 2}$ | <input type="text"/> | e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$ | <input type="text"/> | f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$ | <input type="text"/> |

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

- | | |
|--|----------------------|
| a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021+x}{2021-x}$ | <input type="text"/> |
| b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ | <input type="text"/> |
| c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ | <input type="text"/> |
| d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- | | |
|--|----------------------|
| a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. | <input type="text"/> |
| b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ | <input type="text"/> |
| c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ | <input type="text"/> |
| d) Déterminer la limite de f en $-\infty$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $f(2e^x - 1)$ | <input type="text"/> | d) $xf'(x) - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ | <input type="text"/> | | |

Équations, inéquations

Calcul 7.10

Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> |
| c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |
| e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ | <input type="text"/> |
| f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ | <input type="text"/> |

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis

Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 20.1 — Fonctions circulaires réciproques.



Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

e) $\arctan(1)$

c) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

f) $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

Calcul 20.2 — Valeurs de fonctions hyperboliques.



Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(0)$

d) $\text{sh}(\ln(3))$

b) $\text{sh}(0)$

e) $\text{ch}(\ln(2/3))$

c) $\text{ch}(\ln(2))$

f) $\text{th}(\ln(2))$

Calcul 20.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.



Soient x et y des réels.

Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x)$

b) $\text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\text{sh}(y)$

Résolution d'équations

Calcul 20.4 — Fonctions $x \mapsto a^x$.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \frac{9^x}{2}$

c) $2^x = 3 \times 4^x$

b) $4^x = 2 \times 2^x$

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$...

Calcul 20.5 — Fonctions $x \mapsto a^x$: plus difficile..



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0$

Calcul 20.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

d) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3}$

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$

e) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3}$

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$

Calcul 20.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.



Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(x) = \sqrt{5}$

d) $\text{ch}(x) \leq 4$

b) $\text{sh}(x) = 1$

e) $\text{sh}(x) \geq 3$

c) $\text{th}(x) = \frac{1}{3}$

f) $\text{th}(x) \leq \frac{1}{2}$

Dérivation

Calcul 20.8 — Quelques calculs de dérivées.



Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \mapsto 2^x + x^2$

c) $x \mapsto x^x$

b) $x \mapsto \frac{3^x}{5^x + 1}$

d) $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$

Calcul 20.9 — Quelques calculs de dérivées – bis.



Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $x \mapsto \arcsin(x^2) \dots\dots$

c) $x \mapsto \arctan(\text{th}(x)) \dots\dots$

b) $x \mapsto \text{ch}(x)\text{sh}(x) \dots\dots$

d) $x \mapsto \text{sh}(\text{ch}(x)) \dots\dots$

Calcul 20.10 — Deux dérivées importantes.



a) $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x) \dots\dots\dots$

b) $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \dots\dots\dots$

Calcul 20.11 — Dérivées plus compliquées.



Dériver les fonctions suivantes. La fonction F est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.

a) $x \mapsto F(x^x) \dots\dots\dots$

b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}) \dots\dots\dots$

c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x \arcsin(x) \dots\dots\dots$

d) $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \dots\dots\dots$