

Intégration par parties

Prérequis

Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Intégrales

Calcul 12.1



Calculer :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$

g) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$

b) $\int_0^1 (2t+3)\text{sh}(2t) dt$

h) $\int_0^1 t \arctan t dt$

c) $\int_0^2 t e^{\frac{t}{2}} dt$

i) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t dt$

d) $\int_1^{\ln 2} t 2^t dt$

j) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$

e) $\int_1^e \ln t dt$

k) $\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt$

f) $\int_1^2 t \ln t dt$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt$

Primitives

Calcul 12.2



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \mapsto (-x+1)e^x$

c) $x \mapsto \arctan(x)$

b) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$

d) $x \mapsto x \text{ch}(x)$

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.



a) $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt \dots\dots\dots$

Calcul 12.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \sin(x)\operatorname{sh}(x) \dots\dots$

c) $x \mapsto (x \ln x)^2 \dots\dots\dots$

b) $x \mapsto \ln^2 x \dots\dots\dots$

d) $x \mapsto e^{\arccos(x)} \dots\dots\dots$

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 13.1



Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

- | | | |
|--|------------------------------|----------------------|
| a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ | avec $t = \sin \theta$ | <input type="text"/> |
| b) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$ | avec $u = \sqrt{t}$ | <input type="text"/> |
| c) $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$ | avec $u = e^t$ | <input type="text"/> |
| d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$ | avec $u = \sin t$ | <input type="text"/> |
| e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$ | avec $u = \sin t$ | <input type="text"/> |
| f) $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$ | avec $u = \sqrt{t}$ | <input type="text"/> |

Calcul 13.2



Même exercice.

- | | | |
|---|----------------------------------|----------------------|
| a) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ | avec $u = \cos t$ | <input type="text"/> |
| b) $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt$ | avec $u = e^t$ | <input type="text"/> |
| c) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t - t^2}} dt$ | avec $u = \frac{t}{2} - 1$ | <input type="text"/> |
| d) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$ | avec $t = \tan u$ | <input type="text"/> |
| e) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$ | avec $u = \frac{1}{t}$ | <input type="text"/> |
| f) $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt$ | avec $u = \ln t$ | <input type="text"/> |

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 13.3



Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

- a) $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$
- b) $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 13.4



Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

- a) $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$
- b) $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + \operatorname{th}(x)}$ avec $u = e^x$
- c) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{e^x - 1}$
- d) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$
- e) $x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ avec $u = \sqrt{x^2 - 1}$