# Corrigé du DM 1

1. **Ensemble de définition de $\varphi$**

$$\mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R};_2 x \in \mathcal{D}_{\sin} \text{ et } \sin(2x) \in \mathcal{D}_{\text{Arcsin}}\}$$

Nous savons que Arcsin est une fonction impaire, définie sur $[-1, 1]$ ; ainsi, $\varphi(x) = \text{Arcsin}\,(\sin(2x))$ est donc défini si et seulement si $\sin(2x) \in [-1, 1]$, ce qui est toujours vérifié.

La fonction sin étant impaire, $\varphi$ est composée de fonctions impaires donc $\varphi$ est impaire :

$$\varphi(-x) = \text{Arcsin}(\sin(-2x)) = \text{Arcsin}(-\sin(2x)) = -\text{Arcsin}(\sin(2x))$$

sin étant périodique de période $2\pi$, alors $x \mapsto \sin(2x)$ est $\pi$-périodique :

$$\varphi(x + \pi) = \text{Arcsin}(\sin(2x + 2\pi)) = \text{Arcsin}(\sin(2x)) = \varphi(x)$$

Donc $\varphi$ est périodique de période $\pi$.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est définie sur } \mathbb{R}\text{, impaire, périodique de période } \pi.}$

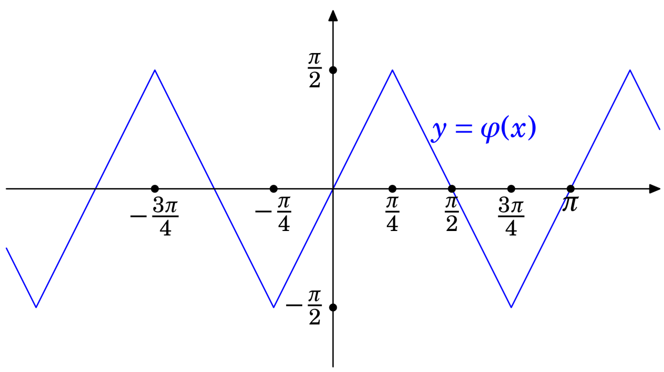
2. **Expression simplifiée de $\varphi$**
Soit $\text{Arcsin}(x)$ est l'unique $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = x$.

a) Lorsque $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\sin(\theta) = \sin(2t)$ donne $\text{Arcsin}(\sin(2t)) = 2t$

b) Lorsque $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $2t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et donc $\sin(\theta) = \sin(2t) = \sin(\pi - 2t)$ avec $\pi - 2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui donne $\text{Arcsin}(\sin(2t)) = \pi - 2t$.

Ainsi, $\varphi$ vérifie donc : $\boxed{\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \pi - 2t & \text{si } t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}}$

3. **Allure de la courbe représentative de $\varphi$**
On vient de définir l'expression de la courbe $\varphi$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme $\varphi$ est impaire, on en déduit la courbe sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par symétrie par rapport à l'origine. De plus, $\varphi$ est $\pi$-périodique, donc on déduit le reste de la courbe par translation de vecteur $\pi \overrightarrow{i}$.




4. **Domaine de définition de $f$**

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{2x}{1 + x^2} \in \mathcal{D}_{\text{Arcsin}}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{2x}{1 + x^2} \in [-1, 1]\right\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1] \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |2x| \leq 1+x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x^2 \leq (1+x^2)^2 \qquad t \mapsto \sqrt{t} \text{ est une bijection croissante de } \mathbb{R}_+ \\
&\Leftrightarrow \quad 1-2x^2+x^4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-x^2)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |2x| \leq 1+x^2 \text{ et } \mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

5. **Parité de $f$**

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$ et comme Arcsin est impaire,

$$f(-x) = \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) = -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

6. **Simplification de $\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$** Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \frac{2\sin(t)}{\cos(t)} \frac{1}{1+\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} = \frac{2\sin(t)}{\cos(t)} \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$$

$$f(\tan(t)) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\right) = \operatorname{Arcsin}(\sin(2t)) = \varphi(t)$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \sin(2t) \text{ et } f(\tan(t)) = \varphi(t).}$

7. **Expression de $f$ avec $\varphi$ et** Arctan

Par propriété de la bijection tan de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ : $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x = \tan(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \operatorname{Arctan}(x)$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi(\operatorname{Arctan}(x)).}$

8. **Variations de $f$**

D'après 2) et 3), le tableau de variations de $\varphi$ est :

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $-\frac{\pi}{4}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

De plus, Arctan est impaire et croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{Arctan} = -\frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
Ainsi, par composition de fonctions, le tableau de variations de $f$ est :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

9. **Extréma de $f$**
D'après le tableau de variations, $f$ présente un maximum en 1, égal à $\frac{\pi}{2}$, et un minimum en $-1$, égal à $-\frac{\pi}{2}$.

10. **Dérivabilité de $f$**
Arcsin étant dérivable sur $]-1,1[$ ainsi, $f$ est dérivable en tout $x$ tel que $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \neq 1$

$$\left(2x = 1+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x=1\right) \quad \text{et} \quad \left(2x = -1-x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1\right)$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}.}$

11. **Calcul de $f'$**
<u>Méthode 1 :</u> Considérons $f = \varphi \circ \text{Arctan}$ : $f'(x) = \text{Arctan}'(x)\varphi'(\text{Arctan}(x))$

$$\varphi'(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[ \\ -2 & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[ \text{ ou } t \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(x) \in \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[ & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \\ \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[ & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[ & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in ]-1,1[ \\ -\dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[ \end{cases}}$

<u>Méthode 2 :</u> Considérons $f(x) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$. Posons $u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ :

$$u'(x) = \cdots = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad f'(x) = \underbrace{\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}}_{u'(x)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}}_{\text{Arcsin}'(u(x))}$$

On a $1-u^2(x) = \cdots = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$ et donc

$$\text{Arcsin}'(u(x)) = \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} = \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} & \text{si } 1-x^2>0 \\ -\dfrac{1+x^2}{1-x^2} & \text{si } 1-x^2<0 \end{cases}$$

Il vient, si $x \in ]-1,1[$ c'est-à-dire $1-x^2>0$, alors $f'(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$

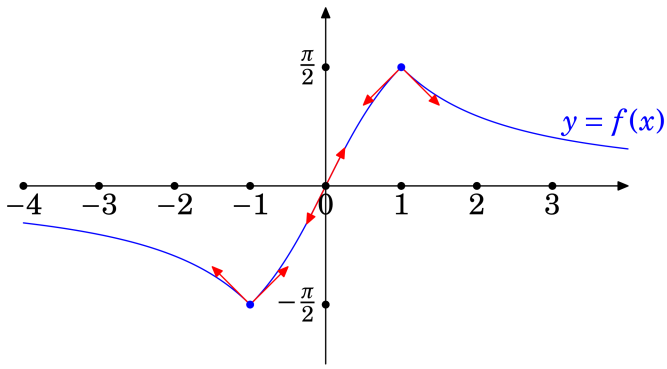
Si $x \in ]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ c'est-à-dire $1-x^2<0$ alors $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$.
On retrouve l'expression précédente.
⇛ En particulier, $f'(x)>0$ si $x \in ]-1,1[$ et $f'(x)<0$ si $x \in ]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$, ce qui est cohérent avec les variations de $f$ obtenu à la question 8.

12. **Dérivabilité en $\pm 1$**
$f$ est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier $f(1) = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$.
Considérons la limite de $f'$ en $1^-$ et $1^+$ :

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \xrightarrow[\substack{x\to 1 \\ x<1}]{} 1 \quad \text{et} \quad f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \xrightarrow[\substack{x\to 1 \\ x>1}]{} -1$$

donc $f$ n'est pas dérivable en 1, mais on peut dire que $f$ est dérivable à gauche ($f'_g(1) = 1$) et à droite ($f'_d(1) = -1$). $\mathcal{C}_f$ possède donc deux demi-tangentes en 1 : à gauche de 1, une demi-tangente d'équation $y = (x-1) + \frac{\pi}{2}$ ; à droite de 1, une demi-tangente d'équation $y = -(x-1) + \frac{\pi}{2}$.
Comme $f$ est impaire, on a un résultat similaire en $-1$.

13. **Allure de $\mathcal{C}_f$**
Notons que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$ : $\mathcal{C}_f$ a en 0 une tangente d'équation $y = 2x$. L'allure de $\mathcal{C}_f$ est donc la suivante (avec des points anguleux en $\pm 1$) :




14. **Antécédents de $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$** Considérons le tableau de variations de $f$ et $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

- Lorsque $x < 0$, $f(x) < 0$ donc l'équation d'inconnue $x$ : $f(x) = h$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 0[$.
- Sur $[0, 1]$, $f$ est continue, strictement croissante, donc d'après le théorème de la bijection, $f$ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f(0), f(1)] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $h$ possède un unique antécédent par $f$ sur $[0, 1]$ noté $x_1$ avec $\text{Arctan}(x_1) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ :

$$h = f(x_1) = \varphi(\text{Arctan}(x_1)) = 2\text{Arctan}(x_1) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \tan\left(\frac{h}{2}\right)$$

- De façon analogue sur $[1, +\infty]$, il existe un unique $x_2$ tel que $h = f(x_2)$ avec $\text{Arctan}(x_2) \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$h = f(x_2) = \varphi(\text{Arctan}(x_2)) = \pi - 2\text{Arctan}(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{h}{2}\right)}$$

Ainsi, lorsque $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la droite d'équation $y = h$ rencontre $\mathcal{C}_f$ en deux points $A$ et $B$ d'abscisses respectives :

$$x_1 = \tan\left(\frac{h}{2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \tan\left(\frac{\pi - h}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{h}{2}\right)}$$

15. **Lieu du milieu de $[AB]$** Le milieu $I$ de $[AB]$ est le point d'abscisse $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et d'ordonnée $y = h$. On a donc :

$$x = x(h) = \frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{h}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi - h}{2}\right)\right]$$

La fonction $h \longmapsto x(h)$ est dérivable, de dérivée :

$$\begin{aligned}
x'(h) &= \frac{1}{4}\left[1 + \tan^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1 - \tan^2\left(\frac{\pi - h}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\tan^2\left(\frac{h}{2}\right) - \tan^2\left(\frac{\pi - h}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\tan^2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{h}{2}\right)}\right]
\end{aligned}$$

On pose $x'(h) = \psi(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{t^2-1}{4t}$ avec $t = \tan^2\left(\frac{h}{2}\right)$.
Comme $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $t = \tan^2\left(\frac{h}{2}\right) \in ]0, 1[$ et donc $\psi(t) < 0$.
De plus, $x(h)\dfrac{1}{2}\left[\tan\left(\dfrac{h}{2}\right) + \tan\left(\dfrac{\pi - h}{2}\right)\right] \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h > 0}]{} +\infty$ et $x(h) \xrightarrow[\substack{h \to \frac{\pi}{2} \\ h < \frac{\pi}{2}}]{} \frac{1}{2}\left[2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 1$

Nous en déduisons le tableau de variations de $h \longmapsto x(h)$ :

| $h$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $x(h)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ |

La courbe $\Gamma$ décrite par le milieu $I$ du segment $[AB]$, elle est décrite par $(x(h), y(h))$ pour $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Comme $\lim\limits_{x(h) \to +\infty} y(h) = 0$ alors $\Gamma$ possède une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
De plus, $x'(h) \xrightarrow[\substack{h \to \frac{\pi}{2} \\ h < \frac{\pi}{2}}]{} \dfrac{1}{2}\left[\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - -\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = 0$ donc $\lim\limits_{x(h) \to 1^+} (x'(h), y'(h)) = (0, 1)$.
La courbe $\Gamma$ possède une tangente verticale au point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

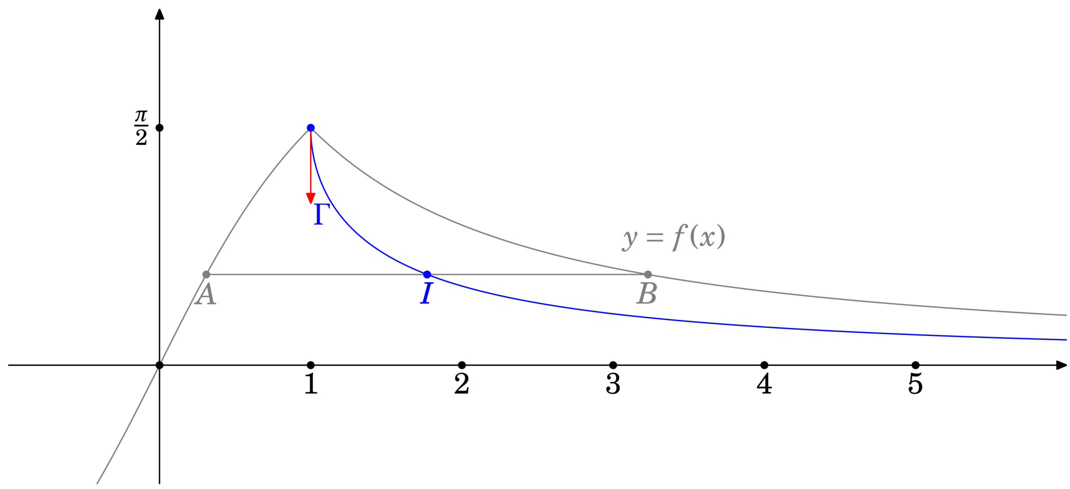



**Figure 3.** Lieu du milieu de $[AB]$