Corrigé du DM 2

Equations complexes

1. **Équation de cercle**
Soient M et Ω deux points d'affixe z et ω.

$$\Omega M^2 = |z-\omega|^2 = (z-\omega)\left(\overline{z}-\overline{\omega}\right) = z\overline{z} - \omega\overline{z} - z\overline{\omega} + \omega\overline{\omega}$$

Ainsi, le point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ appartient au cercle de centre C d'affixe $c \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $CM^2 = r^2$, c'est à dire si et seulement si z vérifie :

$$z\overline{z} - c\overline{z} - z\overline{c} + c\overline{c} = r^2$$

2. **Équation de cercle (suite)**
Soit M un point d'affixe z, et C d'affixe c alors $MC^2 = z\overline{z} - c\overline{z} - z\overline{c} + c\overline{c}$ et

$$z\overline{z} - c\overline{z} - z\overline{c} = d \quad \Leftrightarrow \quad MC^2 = d + |c|^2$$

Ainsi, d'après la première question, il vient :
- lorsque $d + |c|^2 < 0$, l'équation d'inconnue z n'a pas de solution ;
- lorsque $d + |c|^2 = 0$, l'équation d'inconnue z admet une unique solution : le point C ;
- lorsque $d + |c|^2 > 0$, l'équation d'inconnue z est celle du cercle de centre C et de rayon $\sqrt{d+|c|^2}$.

3. **Ensemble des points vérifiant** $AM = kBM$
Soit Γ l'ensemble des points d'affixes z vérifiant : $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k$ M appartient à Γ si et seulement si, successivement :

$$\begin{aligned} |z-a|^2 &= k^2\,|z-b|^2 \\ z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} &= k^2\left[z\overline{z} - b\overline{z} - z\overline{b} + b\overline{b}\right] \\ \left(1-k^2\right) z\overline{z} - \left(a - k^2 b\right)\overline{z} - z\left(\overline{a - k^2 b}\right) &= k^2 b\overline{b} - a\overline{a} \end{aligned}$$

Lorsque $k \neq 1$, en divisant par $1-k^2$, si on pose $c = \dfrac{a-k^2b}{1-k^2}$ et $d = \dfrac{k^2 b\overline{b} - a\overline{a}}{1-k^2}$:

$$z\overline{z} - c\overline{z} - z\overline{c} = d$$

Ainsi, lorsque $k = 1$, $AM = BM$ si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, qui est une droite.
Lorsque $k \neq 1$, d'après la question précédente, Γ est soit vide, soit un point soit un cercle.

4. **Cas où** $k \neq 1$
Lorsque $k \neq 1$ et $d + |c|^2 > 0$ alors Γ est cercle de centre C d'affixe $c = \dfrac{a-k^2b}{1-k^2}$ et de rayon r tel que :

$$r^2 = |\alpha|^2 + d = \frac{a-k^2b}{1-k^2}\,\frac{\overline{a}-k^2\overline{b}}{1-k^2} + \frac{k^2 b\overline{b} - a\overline{a}}{1-k^2} = \cdots = \frac{k^2 AB^2}{\left(1-k^2\right)^2} > 0$$

On note que si $k \neq 1$ alors $|\alpha|^2 + d > 0$ et Γ est un cercle !

5. **Les solutions de $(\mathcal{E})$ se trouvent sur un cercle ou une droite**
Soit M un point d'affixe z, solution de $(\mathcal{E})$: $(z-a)^n = c(z-b)^n$
Notons que $z = b$ n'est pas solution de $(\mathcal{E})$ car $a \neq b$. Nous pouvons diviser par $(z-b)^n \neq 0$:

$$(\mathcal{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n = c \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^n = |c| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \sqrt[n]{|c|}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

- lorsque $|c| = 1$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont sur la médiatrice de $[AB]$,
- lorsque $|c| \neq 1$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont sur le cercle de centre.

6. **Solutions de $(\mathcal{E})$**

a) **Résolution de l'équation** Avec les notations $c = \exp(i\gamma)$ et $a = \overline{b} = \rho\exp(i\alpha)$ avec $(\gamma, \alpha, \rho) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $(\mathcal{E})$ de vient :

$$(\mathcal{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z-\rho\exp(i\alpha)}{z-\rho\exp(-i\alpha)}\right)^n = \exp(i\gamma)$$

Le théorème sur les racines n-ième donne, en notant $2\beta_k = \dfrac{\gamma}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ \frac{z-\rho\exp(i\alpha)}{z-\rho\exp(-i\alpha)} = \exp(2i\beta_k) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ z-\rho\exp(i\alpha) = \exp(2i\beta_k)(z-\rho\exp(-i\alpha)) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ z\left(1-\exp(2i\beta_k)\right) = \rho\left(\exp(i\alpha) - \exp(i(2\beta_k - \alpha)\right)
\end{aligned}$$

En multipliant par $\exp(-i\beta_k)$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ z\left(\exp(-i\beta_k) - \exp(i\beta_k)\right) = \rho\left(\exp(i(\alpha-\beta_k) - \exp(i(\beta_k - \alpha)\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ z2i\sin(-\beta_k) = \rho 2i\sin(\alpha - \beta_k)
\end{aligned}$$

Donc, lorsque $\sin(\beta_k) \neq 0$: $z = \dfrac{\sin(\beta_k - \alpha)}{\sin(\beta_k)}$.
De plus , on sait que $a \neq b$ donc $a, b \notin \mathbb{R}$ et $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$. Il vient que si $\sin(\beta_k) = 0$, alors l'équation $(\mathcal{E})$ n'a pas de solution.
Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc de la forme :

$$z = -\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } \frac{\gamma}{2} + \frac{2k\pi}{n} \not\equiv 0\ [\pi]$$

b) **Les solutions sont réelles**
Les solutions ci-dessus sont réelles ; ce qui est cohérent avec le résultat de la question 5, si $|c| = 1$ alors les solutions sont sur la médiatrice de $[AB]$, deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses (car $a = \overline{b}$).

7. **Module et argument de :** $1 + i\tan(\alpha)$

$$1 + i\tan(\alpha) = 1 + \frac{i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)}\exp(i\alpha)$$

De plus, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\alpha) > 0$. De plus, tan est impaire :

$$\frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)} = \frac{1+i\tan(\alpha)}{1+i\tan(-\alpha)} = \frac{\dfrac{1}{\cos(x)}\exp(i\alpha)}{\dfrac{1}{\cos(x)}\exp(-i\alpha)} = \exp(2i\alpha)$$

Ainsi, $\boxed{1+i\tan(\alpha)=\dfrac{1}{\cos(\alpha)}\exp(i\alpha) \text{ et } \dfrac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}=\exp(2i\alpha).}$

8. **Les solutions de $(\mathcal{F})$ sont réelles.**

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (\mathcal{F}) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{i(-i+z)}{i(-i-z)}\right)^n = \exp(2i\alpha) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = (-1)^n\exp(2i\alpha) \end{aligned}$$

On se ramène à l'équation $(\mathcal{E})$, en posant $a=i$, $b=-i$ et $c=(-1)^n\exp(2i\alpha)$.
Comme $|c|=1$ alors $\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{F}) \text{ sont réelles.}}$

9. **Équation résolvante**
Comme z est réel et que Arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ alors la changement $t=\operatorname{Arctan}(z)$ est valide et donc le changement $z=\tan(t)$ aussi.

$$\begin{aligned} z=\tan(t) \text{ est solution de } (\mathcal{F}) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+i\tan(t)}{1-i\tan(t)}\right)^n = \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exp(2it)^n = \exp(2i\alpha) \text{ d'après la question 7)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exp(2int) = \exp(2i\alpha) \text{ d'après Moivre} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{z \text{ est solution de } (\mathcal{F}) \text{ si et seulement si } t \text{ est solution de } (\mathcal{F}') : \exp(2int)=\exp(2i\alpha).}$

10. **Solutions de $(\mathcal{F})$**
On en déduit qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $2nt=2\alpha+2k\pi$

$$t=\frac{1}{n}(\alpha+k\pi) \quad \Leftrightarrow \quad z=z_k=\tan\left(\frac{1}{n}(\alpha+k\pi)\right)$$

La fonction tan étant périodique de période π, alors pour tout $j\in\mathbb{N}$: $z_{k+jn}=z_k$
Il y a donc au plus n valeurs différentes de z_k pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Ainsi, $\boxed{z \text{ est solution de } (\mathcal{F}) \text{ si et seulement s'il existe } k\in[\![0,n-1]\!] \text{ tel que : } z=\tan\left(\frac{1}{n}(\alpha+k\pi)\right).}$