Corrigé du DM 3

Exercice 1

Remarque sur le domaine de définition : l'intégrale est définie si $g : t \mapsto \dfrac{1}{te^t}$ est continue sur le segment de bornes x et x^2. Or g est continue sur $\mathbb{R}^*$.
Si $x \in \mathbb{R}_-^*$ alors $0 \in [x, x^2]$, l'intégrale n'est pas définie.
Si $x \in \mathbb{R}_+^* *$ le segment de bornes x et x^2 ($[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$) est inclus dans $\mathbb{R}^*$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

1. Notons G une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$ alors G est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f(x) = G(x^2) - G(x)$$

2. $x \mapsto x^2$ est dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition d'applications dérivables, $x \mapsto G(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par différence d'applications dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2}{xe^{x^2}} - \frac{1}{xe^x}$$

3. On a
$$\begin{aligned} 0 < t < 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 \leq e^t \leq e \text{ car exp est croissante} \\ &\Rightarrow \quad t \leq te^t \leq te \text{ car } t > 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{te} \leq g(t) \leq \frac{1}{t} \text{ car } x \mapsto \tfrac{1}{x} \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Pour $x \in]0, 1[$, $x^2 < x$ et donc $\forall t \in [x^2, x], g(t) \leq \dfrac{1}{t}$. La croissance de l'intégrale donne :

$$\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{te} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{te^t}$$

Ainsi, $f(x) = -\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{te^t} \leq -\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{te} = \frac{1}{e}\left[-\ln t\right]_{x^2}^{x} = -\frac{\ln x}{e} - \left(-\frac{\ln(x^2)}{e}\right) = \frac{\ln x}{e}$.
Or $\dfrac{\ln x}{e} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$. Donc, par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{0^+} f = -\infty}$.

4. Pour $x > 1$ on a $x < x^2$ et :

$$\begin{aligned} x < t < x^2 \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq e^x \leq e^t \text{ car exp est croissante} \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq te^x \leq te^t \text{ car } t > 0 \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq g(t) \leq \frac{1}{te^x} \text{ car } x \mapsto \tfrac{1}{x} \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

La croissance de l'intégrale donne : $0 \leq f(x) \leq \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{te^x} = \frac{\ln(x)}{e^x}$.

La croissance comparée donne $\dfrac{\ln(x)}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, on a $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$.

Exercice 2

1. On note que $z+\overline{z}-1=0 \Leftrightarrow 2Re(z)=1$; donc $\boxed{D=\{a+ib; a,b\in\mathbb{R} \text{ et } a\neq\frac{1}{2}\}}$.

2. On a $f(z)=1 \Leftrightarrow z=z+\overline{z}-1 \Leftrightarrow \overline{z}=1 \Leftrightarrow z=1$ et posant $z=a+ib$:

$$f(z)=i \Leftrightarrow a+ib=i(2a-1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\overset{-1}{f}(1)=\{1\} \text{ et } \overset{-1}{f}(i)=\{-i\}}$.

3. Posons $z=a+ib$. On a

$$f(z)=z \Leftrightarrow \frac{a+ib}{2a-1}=a+ib \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2a-1}=a \\ \dfrac{b}{2a-1}=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2a-2)=0 \\ b(2a-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \text{ ou } a=1 \\ b=0 \text{ ou } a=1 \end{cases}$$

Les invariants de f sont : $\boxed{\{0, 1+ib; b\in\mathbb{R}\}}$

4. Posons $z=a+ib$ et $w=c+id$. On a :

$$f(z)=w \Leftrightarrow \frac{a+ib}{2a-1}=c+id \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2a-1}=c \\ \dfrac{b}{2a-1}=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2c-1)-c=0 \\ b=d(2a-1) \end{cases}$$

Il y a deux cas :

- soit $2c=1$, c'est-à-dire $c=\frac{1}{2}$ alors $c=\frac{1}{2}$ qui est impossible, donc w n'a pas d'antécédent.
- soit $2c\neq 1$, c'est-à-dire $w\in D$: $f(z)=w \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{c}{2c-1} \\ b=d\left(2\dfrac{c}{2c-1}-1\right)=\dfrac{d}{2c-1} \end{cases} \Leftrightarrow z=f(w)$

Vérification : le calcul de $f\circ f$ donne bien $id_{\mathbb{C}}$.
En conclusion, f réalise une bijection de D dans D et $f^{-1}=f$.