Corrigé du DM 4

Partie A – Solutions sur $\left]-1,1\right[$

1. **Solutions sur** $\left]-1,1\right[$
L'équation homogène $(\mathcal{H})$: $\left(x^2-1\right)y'+xy=0$ se met sous forme résolue sur $\left]-1,1\right[$:

$$y'+a(x)y=0 \text{ en posant } a(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

Une primitive de a est $A(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|x^2-1\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ car $x\in]-1,1[$.
Les solutions de $(\mathcal{H})$ sont de la forme, avec $K\in\mathbb{R}$:

$$y(x)=K\exp(-A(x))=K\exp\left(-\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)=\frac{K}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi, les solutions sur $\left]-1,1\right[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{H})$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad y\left(x\right)=\frac{K}{\sqrt{1-x^2}} \text{ avec } K\in\mathbb{R}$$

2. **Solutions générales sur** $\left]-1,1\right[$
$(\mathcal{E})$ se met sous forme résolue sur $\left]-1,1\right[$: $y'+\dfrac{x}{x^2-1}y=\dfrac{1}{x^2-1}$
Utilisons la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière de la forme :
$y(x)=\dfrac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}
K(x)&=y(x)\sqrt{1-x^2}\\
K'(x)&=y'(x)\sqrt{1-x^2}+y(x)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\\
&=\left(y'+\frac{x}{x^2-1}y\right)\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-1}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Une solution particulière est donnée par $K(x)=-\mathrm{Arcsin}(x)$, soit $y(t)=-\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\left]-1,1\right[$ sont les fonctions s_K définies par

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad s_K\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(K-\mathrm{Arcsin}(x)\Big)$$

3. **Limite au point** 1
On a $K-\mathrm{Arcsin}(x)\xrightarrow[\substack{x\to1\\x<1}]{}K-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\xrightarrow[\substack{x\to1\\x<1}]{}+\infty$

- Lorsque $K>\dfrac{\pi}{2}$, alors $K-\dfrac{\pi}{2}>0$ et donc : $s_k(x)\xrightarrow[\substack{x\to1\\x<1}]{}+\infty$
- Lorsque $K<\dfrac{\pi}{2}$, alors $K-\dfrac{\pi}{2}<0$ et donc : $s_k(x)\xrightarrow[\substack{x\to1\\x<1}]{}-\infty$

4. **Propriétés de f**

Arcsin et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sont dérivables sur $]-1,1[$ et $\sqrt{1-x^2}$ ne s'annule pas. Par quotient, f est une fonction continue et dérivable sur $\left]-1,1\right[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \sqrt{1-x^2} - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right)\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left(-1 + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \end{aligned}$$

En multipliant par $1-x^2$, f vérifie :

$$\left(1-x^2\right) f'(x) = -1 + \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{xf(x)}$$

Donc $\left(1-x^2\right) f'(x) - xf(x) = -1$

Ainsi, f est donc dérivable sur $\left]-1,1\right[$, de dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}\left(-1 + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

et est bien solution de $(\mathcal{E})$ car $\left(x^2-1\right) f'(x) + xf(x) = 1$.

5. **Oh, une erreur**

Il y a visiblement une erreur d'énoncé, puisque, d'après l'équation précédente :

$$\left(1-x^2\right) f'(x) = xf(x) - 1$$

De plus, la relation donnée induit que f' et f sont de signe contraire sur $]-1,0[$ ... L'erreur d'énoncé se prolonge.

Attention ! Il faut apprendre à réagir devant une erreur d'énoncé sans perdre de temps :

- adapter l'énoncé ;
- passer directement à la question suivante.

Ici, on peut se demander si la conclusion de la question est pertinente :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) \geq 0$$

Donc f est toujours positive. Il vient pour $x \in]-1,0]$, $xf(x) - 1 < 0$ et donc $f'(x) < 0$. Ainsi, f' et f n'ont pas toujours le même signe ...

6. **Relation vérifiée par** Arcsin

Soit φ la fonction définie sur $\left[0,1\right]$ par :

$$\varphi(x) = \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

Arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$; $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, φ est continue sur $\left[0,1\right]$, dérivable, sauf éventuellement aux points où

$$x = 1 \text{ ou } 1-x^2 = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x^2} = 1$$

φ est donc dérivable sur $]0,1[$.
Posons $u(x)=\sqrt{1-x^2}$ ce qui donne $1-u^2(x)=1-\left(1-x^2\right)=x^2$ et donc $\sqrt{1-u^2(x)}=x$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\mathrm{Arcsin}'(x)}-\underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{u'(x)}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}}_{\mathrm{Arcsin}'(u(x))}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{x}=0\end{aligned}$$

La caractérisation des applications constantes donne que φ est constante sur $]0,1[$ et comme elle est continue sur $[0,1]$, elle constante sur $[0,1]$.

$$\varphi(0)=\mathrm{Arcsin}(0)+\mathrm{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x\in\left[0,1\right],\ \mathrm{Arcsin}(x)+\mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{\pi}{2}.}$

7. **Limite de f au point 1**
Nous savons que : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arcsin}(x)\right)$
D'après la question précédente : $\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arcsin}(x)=\mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

Ainsi, si on pose $u(x)=\sqrt{1-x^2}$, alors : $\boxed{f(x)=\dfrac{\mathrm{Arcsin}\big(u(x)\big)}{u(x)}}$

Nous savons que $u(x)\xrightarrow[x\to1]{}0$ et comme Arcsin est dérivable en 0, il vient :

$$\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}\mathrm{Arcsin}'(0)=1$$

Ainsi, par composition de limite, on obtient : $\boxed{f(x)=\dfrac{\mathrm{Arcsin}\big(u(x)\big)}{u(x)}\xrightarrow[x\to1]{}1}$

La limite de f en -1 vaut $+\infty$ (pas de forme indéterminée).
- Sur $]-1,0]$, on a déjà vu (à la question 5) que $f'(x)\leq 0$, donc que f est décroissante.
- Sur $]0,1[$, la fonction u est clairement décroissante.

Étudions les variations de $\varphi(x)=\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0 par la valeur 1.

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\mathrm{Arcsin}(x)\right)\qquad\text{et posons } \psi(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\mathrm{Arcsin}(x)$$

On note que $\psi(0)=0$ sa dérivée sur $[0,1[$ est :

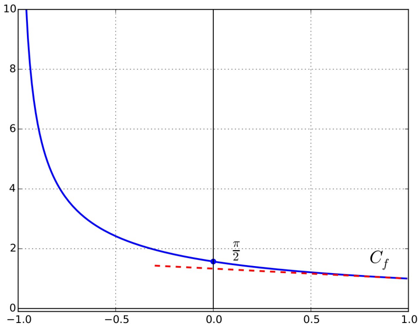
$$\psi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+x\times\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\geq 0$$

Donc ψ est croissante, nulle en 0, donc positive sur $\left[0,1\right[$. Il vient que φ' est positive sur $\left[0,1\right[$, donc φ est croissante sur $\left[0,1\right[$. Enfin, par composition de u, décroissante sur $[0,1[$, et φ, croissante, il vient que f est décroissante sur $\left[0,1\right[$.

Nous en déduisons le tableau de variation de f :

x	-1		0		1
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	1

8. **Allure du graphe de f**



Partie B – Solutions sur $\left]-\infty,-1\right[$ et $\left]1,+\infty\right[$.

9. **Propriétés de g**

Une fois n'est pas coutume, les propriétés de parité de g ne sont pas évidentes. Si $x \in J$, $-x \in J$ et nous pouvons calculer $g(x)+g(-x)$:

$$\begin{aligned} g(x)+g(-x) &= \frac{\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\ln\left(\left|-x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ln\left(\left|\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)\right|\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ln\left(\left|x^2-(x^2-1)\right|\right) = 0 \end{aligned}$$

g est donc bien une fonction impaire. g est dérivable sur son ensemble de définition, car obtenue comme somme, produit et composée de fonctions dérivables. Posons $w : x \mapsto x+\sqrt{x^2-1}$, alors

$$\sqrt{x^2-1}\; g(x) = \ln\left(|w(x)|\right)$$

Nous pouvons dériver cette égalité fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1}g'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}g(x) &= \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

En multipliant par $\sqrt{x^2-1}$, on a : $\left(x^2-1\right)g'(x)+xg(x)=1$.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est une fonction impaire, solution particulière de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \left]-\infty,-1\right[\text{ et sur } \left]1,+\infty\right[.}$

Les solutions de l'équation homogène sur $\left]-\infty,-1\right[$ et sur $\left]1,+\infty\right[$ sont de la forme

$$x \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2-1\right|\right)} = \frac{K}{\sqrt{x^2-1}}$$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\left]-\infty,-1\right[$ et sur $\left]1,+\infty\right[$ sont de la forme :

$$s_K(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(K+\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)\right)$$

10. **Limite en $+\infty$** On a :

$$\begin{aligned} x>1 \quad &\Rightarrow \quad 1 < x \le x+\sqrt{x^2-1} \le x+x \\ &\Rightarrow \quad 0 < \ln(x) \le \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \le \ln(2x) \text{ car ln est croissante} \\ &\Rightarrow \quad 0 < g(x) \le \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln(2x)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \text{ car } \sqrt{x^2-1}>0 \end{aligned}$$

Par croissance comparée, $\dfrac{\ln(2x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\ln(2x)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puis par encadrement, $\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

11. **Signe de g'** On sait que $\left(x^2-1\right)g'(x) + xg(x) = 1$ donc pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x^2-1}\left(1 - xg(x)\right) = \frac{1}{x^2-1}\left(1 - \frac{x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \frac{x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) = \underbrace{\frac{x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}}_{\geq 0} v(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour } x > 1,\ g'(x) \text{ et } v(x) \text{ ont le même signe.}}$

12. **Variations de g**
Pour étudier les variations de g, commençons par étudier les variations puis le signe de v. v est dérivable sur $\left[1, +\infty\right[$ de dérivée :

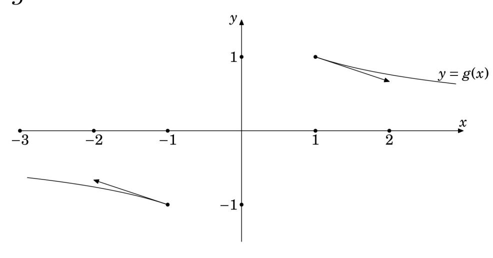
$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} - \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\left(x^2 - \left(x^2-1\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)}_{=1} \\ &= \frac{1-x^2}{x^2\sqrt{x^2-1}} \leq 0 \end{aligned}$$

Comme $v(1) = 0$, on en déduit : $v(x) < 0$ si $x > 1$, c'est à dire :

$$\forall x > 1, \quad g'(x) < 0$$

Ainsi, la fonction g étant impaire, le tableau de variation de g est donc :

x	$-\infty$		-1	X	1		$+\infty$
	0			X	1		
$g(x)$		$\searrow$		X		$\searrow$	
			-1	X			0



Partie C – Prolongement en ± 1

13. **Une solution sur $]-1, +\infty[$**
D'après 3), la seule solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-1, 1[$ possédant une limite finie en 1 est :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right)$$

D'après 9), les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]1, +\infty[$ sont de la forme : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(K + \ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)\right)$

De plus, si $K \neq 0$, on trouve que $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(K + \ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)\right) = +\infty$.

On pose $\varphi \in \mathbb{R}^{]-1,+\infty[}$ telle que $\varphi_{|]-1,1[} = f$, $\varphi_{|]1,+\infty[} = g$ et $\varphi(1) = 1$.
On sait que f et g se prolongent par continuité en 1 avec $f(1) = 1 = \varphi(1) = g(1)$ donc φ est continue en 1 et donc sur $]-1, +\infty$.
De plus, les prolongements de f et de g sont dérivables en 1 tels que $f'(1) = g'(1) = -\frac{1}{3}$ donc φ est dérivable en 1 et donc sur $]-1, +\infty$.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est l'unique solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur }]-1,+\infty[\text{, continue et dérivable, et avec } \lim_{-1} \varphi = \lim_{-1} f = +\infty.}$

14. **Changement de variable**
Pour $x > 1$ on pose $y(x) = -z(-x)$ ce qui donne $y'(x) = z'(-x)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\forall x > -1, \quad (x^2-1)y'(x) + xy(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x > -1, \quad (x^2-1)z'(-x) - xz(-x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x > -1, \quad ((-x)^2-1)z'(-x) + (-x)z(-x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall t < 1, \quad (t^2-1)z'(t) + tz(t) = 1 \quad \text{en posant } t = -x
\end{aligned}$$

15. **Solution sur** $]-\infty, 1[$
D'après ce qui précède, trouver une solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-\infty, 1]$ revient à trouver une solution sur $]-1, +\infty[$. Or il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-1, +\infty[$ continue et dérivable.
Ainsi, $\boxed{\text{il existe une unique solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur }]-\infty,1[\text{ continue et dérivable : } \psi : x \mapsto -\varphi(-x).}$