

# Colle 6

Cette colle est l'occasion de revenir la colle précédente dans les exercices (primitive, calcul d'intégrale). Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

## EXTRAIT DU PROGRAMME

### 1. TECHNIQUES FONDAMENTALES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

#### B. PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

##### B. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction  $a$  est constante.

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

##### C. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Équation homogène associée.

où  $a$  et  $b$  sont des scalaires et  $f$  est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Si  $a$  et  $b$  sont réels, description des solutions réelles.

Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme  $x \mapsto A \exp(\lambda x)$  avec  $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ ,  $x \mapsto B \cos(\omega x)$  et  $x \mapsto B \sin(\omega x)$  avec  $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$ .

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

### MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Mettre en place la structure de l'ensemble solution et le principe de superposition
- Mettre en place la méthode de variation de la constante
- Chercher une solution particulière d'une EDL lorsque le second membre est du type polynomial-exponentiel et/ou trigonométrique.

### QUESTIONS DE COURS PRATIQUES

- Dans le cadre des équations différentielles linéaires, présenter les notions de : linéarité, équation homogène, structure de l'ensemble des solutions, principe de superposition.
- ★ Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'une EDL d'ordre 1.  
Traiter le cas de  $(1 + x^2)y' + y = 0$  sur  $\mathbb{R}$ .
- ★ Présenter la méthode de variation de la constante pour une EDL d'ordre 1 afin d'en trouver une solution particulière.  
Traiter la cas  $\sin(x)y' - \cos(x)y + 1 = 0$  sur  $]0, \pi[$ .
- ★ Présenter la méthode de recherche d'une solution particulière d'une EDL d'ordre 1 lorsque  $a$  est constant et  $b$  est un produit d'une fonction polynomiale et d'une exponentielle.  
Traiter le cas de  $y'' - y = \cos(x) + xe^x + x^2$ .
- ★ Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants complexes, puis à coefficients réels.  
Traiter un exemple simple pour chacune des cinq situations possibles.
- ★ Présenter la méthode de recherche d'une solution particulière d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants et ayant pour second membre  $Ae^{\lambda x}$ .  
Décliner le résultat précédent pour résoudre :  $y'' - 4y' + y = \cos(2x)$ .

### QUESTIONS DE COURS SUPPLÉMENTAIRES

- ★ Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas d'une EDL d'ordre 1.
- ★ Résolution de l'équation homogène d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants complexes.
- ★ Présenter la méthode de recherche d'une solution particulière d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants et ayant pour second membre  $P(x)e^{\lambda x}$ .  
Décliner le résultat précédent pour résoudre :  $y'' + 9y = x \cos(3x)$ .