Corrigé du DM 5

Fonctions indicatrices

Partie A - Indicatrices et opérations ensemblistes

1. Soit $A, B, C \subset E$.

$\Rightarrow$
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\backslash(B\cup C)} &= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\cup C}\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\big(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\big)\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\backslash B)\cap(A\backslash C)} &= \mathbb{1}_{A\backslash B}\mathbb{1}_{A\backslash C}\\
&= \big(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\big)\big(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C\big)\\
&= \mathbb{1}_A^2 - \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\forall A, B, C \subset E, \quad A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\cap(A\backslash C)}$

$\Rightarrow$
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\backslash(B\cap C)} &= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\cap C}\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\backslash B)\cup(A\backslash C)} &= \mathbb{1}_{A\backslash B} + \mathbb{1}_{A\backslash C} - \mathbb{1}_{A\backslash B}\mathbb{1}_{A\backslash C}\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \big(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\big)\big(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C\big)\\
&= 2\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\forall A, B, C \subset E, \quad A\backslash(B\cap C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)}$

$\Rightarrow$
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\backslash(B\backslash C)} &= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\backslash C}\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\big(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\big)\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\big)
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\backslash B)\cup(A\cap C)} &= \mathbb{1}_{A\backslash B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - \mathbb{1}_{A\backslash B}\mathbb{1}_{A\cap C}\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \big(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\big)\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\forall A, B, C \subset E, \quad A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B)\cup(A\cap C)}$

2. Soit A, B deux parties de E.
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\overline{A\cap B}} &= 1 - \mathbb{1}_{A\cap B} = 1 - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\\
\mathbb{1}_{\bar{A}\cup\bar{B}} &= \mathbb{1}_{\bar{A}} + \mathbb{1}_{\bar{B}} - \mathbb{1}_{\bar{A}}\mathbb{1}_{\bar{B}}\\
&= 1 - \mathbb{1}_A + 1 - \mathbb{1}_B - \big(1 - \mathbb{1}_A\big)\big(1 - \mathbb{1}_B\big)\\
&= 1 - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\\
\mathbb{1}_{\overline{A\cup B}} &= 1 - \mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\\
\mathbb{1}_{\bar{A}\cap\bar{B}} &= \mathbb{1}_{\bar{A}}\mathbb{1}_{\bar{B}} = \big(1 - \mathbb{1}_A\big)\big(1 - \mathbb{1}_B\big)\\
&= 1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B
\end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\forall A, B \subset E, \quad \overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B} \text{ et } \overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}}$.

3. Soit A, B, C trois parties de E.
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cap(B\cup C)} &= \mathbb{1}_A\big(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\big)\\
&= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\\
\mathbb{1}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} &= \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - \mathbb{1}_{A\cap B}\mathbb{1}_{A\cap C}\\
&= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{1}_{A\cup(B\cap C)} & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\cap C} - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B\cap C} \\
 & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \\
\mathbb{1}_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} & = & \mathbb{1}_{A\cup B} \mathbb{1}_{A\cup C} \\
 & = & \big(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B\big)\big(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C\big) \\
 & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C \times (1-1) + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \times (1-1) + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \times (-1-1+1) \\
 & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C
\end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\forall A, B, C \subset E, \quad A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \text{ et } A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)}$

4. a) Soit $A, B \subset E$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{1}_{A\Delta B} & = & \mathbb{1}_{(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})} \\
 & = & \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} + \mathbb{1}_{B\cap\bar{A}} - \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} \mathbb{1}_{B\cap\bar{A}} \\
 & = & \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \big(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B\big)\big(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B\big) \\
 & = & \mathbb{1}_A - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B \\
 & = & \mathbb{1}_A^2 - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B^2 \\
 & = & \big(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\big)^2 \\
 & = & \quad \text{les valeurs prises sont 0 ou 1 (donc } x^2 = x) \\
 & = & |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|
\end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\forall A, B \subset E, \quad \mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|}$.

b) Soit $A, B \subset E$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} & = & \mathbb{1}_{A\cup B} - \mathbb{1}_{A\cup B} \mathbb{1}_{A\cap B} \\
 & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \big(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B\big)\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \\
 & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B
\end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\forall A, B \subset E, \quad A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)}$.

c) Soit $A, B, C \subset E$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} & = & \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B\Delta C} \\
 & = & \mathbb{1}_A \times |\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C| \\
\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} & = & |\mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_{A\cap C}| \\
 & = & |\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C| \\
 & = & \mathbb{1}_A \times |\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C|
\end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\forall A, B \subset E, \quad A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)}$.

5. Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:

- $\boxed{A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B}$ en effet : $\begin{array}{rcl} A \subset B & \Leftrightarrow & (x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B) \\ & \Leftrightarrow & (\mathbb{1}_A(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_B(x) = 1) \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \end{array}$
- $\boxed{A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 0}$
- $\boxed{A \cup B \cup C = E \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C \geq 1}$

6. Soit $A, B \subset E$:

- $\boxed{\mathbb{1}_C = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \quad \Leftrightarrow \quad C = A\cap B}$ en effet

$$\begin{array}{rcl}
x \in C & \Leftrightarrow & \mathbb{1}_C(x) = \min(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = 1 \\
 & \Leftrightarrow & \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1 \\
 & \Leftrightarrow & x \in A \text{ et } x \in B \\
 & \Leftrightarrow & x \in A\cap B
\end{array}$$

- $\boxed{\mathbb{1}_D = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \quad \Leftrightarrow \quad D = A\cup B}$

Partie B - Indicatrices et cardinalité

7. Soit $C = \{(A,B) ; A \subset B \subset E\}$.

a) Approche 1 : Considérons l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1,2\}) \\ (A,B) & \longmapsto & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \end{array} \right.$$

On note que B est l'image réciproque de $\{1,2\}$; que A est l'image réciproque de $\{2\}$.
Ceci permet d'établir le caractère surjectif et injectif de φ : donc φ est bijective.

La bijection exhibée donne que les deux ensembles sont équipotents.
Comme $\text{Card}\big(\mathcal{F}(E,\{0,1,2\})\big) = 3^n$ alors $\boxed{\text{Card}(C) = 3^n}$.

Remarque : On pourrait introduire $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1,2\}) \\ (A,B) & \longmapsto & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \end{array} \right.$.
Dans ce cas φ est une restriction de ψ sur C : $\varphi = \psi_{|C}$
L'application ψ est surjective, non injective. Cette restriction permet de construire une bijection.

b) Approche 2 : Par le calcul descriptif :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Card}(C) & = & \displaystyle\sum_{A \subset B \subset E} 1 \\
& & \text{choix de } A \text{ puis de } B \backslash A \\
& = & \displaystyle\sum_{A \subset E} \sum_{(B\backslash A) \subset (E \backslash A)} 1 \\
& & \text{discussion suivant le cardinal de } A : k = \text{Card}(A) \\
& = & \displaystyle\sum_{\substack{A \subset E \\ \text{Card}(A)=k}} \sum_{(B\backslash A) \subset (E \backslash A)} 1 \\
& & \text{discussion suivant le cardinal de } A : k = \text{Card}(A) \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A \subset E \\ \text{Card}(A)=k}} \sum_{(B\backslash A) \subset (E \backslash A)} 1 \\
& & \text{Le nombre de parties d'un ensemble de } n-k \text{ éléments est } 2^{n-k} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A \subset E \\ \text{Card}(A)=k}} 2^{n-k} \\
& & \text{le nombre de façons de choisir une partie de } k \text{ éléments dans } E \text{ est : } \dbinom{n}{k} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \\
& & \text{formule du binôme} \\
& = & (2+1)^n
\end{array}$$

Ainsi, on retrouve $\boxed{\text{Card}(C) = 3^n}$.

8. Soit $E = \{1,2,3\}$, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 8 éléments :

$$\begin{array}{rll}
S1 & = \text{Card}(\emptyset) & + \text{Card}(\{1\}) + \text{Card}(\{2\}) + \text{Card}(\{2\}) \\
& & + \text{Card}(\{1,2\}) + \text{Card}(\{1,3\}) + \text{Card}(\{2,3\}) + \text{Card}(\{1,2,3\}) \\
& = 12 &
\end{array}$$

9. On complète la démarche proposée pour le calcul de $S_1 = \sum_{A \subset E} \operatorname{Card}(A)$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{A\subset E}\sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) \\
&\quad \text{on permute les deux sommes} \\
&= \sum_{x\in E}\sum_{A\subset E} \mathbb{1}_A(x) \\
&\quad \text{il s'agit de dénombrer toutes les parties de } E \text{ qui contiennent l'élément } x \\
&\quad \text{c'est-à-dire le nombre de façons de compléter } \{x\} \text{ en une partie de } E \\
&\quad \text{c'est-à-dire le nombre de parties de } E\backslash\{x\} \\
&= \sum_{x\in E} \operatorname{Card}\Big(\mathcal{P}(E\backslash\{x\})\Big) \\
&\quad E\backslash\{x\} \text{ contient } n-1 \text{ éléments donc } \operatorname{Card}\Big(\mathcal{P}(E\backslash\{x\})\Big) = 2^{n-1} \\
&= \sum_{x\in E} 2^{n-1} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S_1 = \sum_{A\subset E} \operatorname{Card}(A) = n2^{n-1}}$.

10. Avec $E = \{1,2\}$, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 4 éléments, ce qui donne une double somme avec 16 termes. Structurons les possibilités et dans un tableau à double entrées :

	$\operatorname{Card}(A\cap B)$	A: $\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
B	$\emptyset$	0	0	0	0
	$\{1\}$	0	1	0	1
	$\{2\}$	0	0	1	1
	$\{1,2\}$	0	1	1	2

$S_2 = 8$

11. Calcule de $S_2 = \sum_{A,B\subset E} \operatorname{Card}(A\cap B)$:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{A,B\subset E} \operatorname{Card}(A\cap B) &&= \sum_{A\subset E}\sum_{B\subset E}\sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) \\
&= \sum_{A\subset E}\sum_{B\subset E}\sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) \\
&\quad \text{Permutons les sommes} \\
&= \sum_{A\subset E}\sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) \underbrace{\sum_{B\subset E} \mathbb{1}_B(x)}_{\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E\backslash\{x\}))} &&= \sum_{x\in E}\sum_{A\subset E} \mathbb{1}_A(x)2^{n-1} \\
&= \sum_{x\in E} 2^{n-1}\times 2^{n-1} &&= n2^{n-1}\times 2^{n-1} = n4^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S_2 = \sum_{A,B\subset E} \operatorname{Card}(A\cap B) = n4^{n-1}}$.

12. Calcule de $S_3 = \sum_{A,B\subset E} \operatorname{Card}(A\cup B)$:

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A\cup B)\\
&= \sum_{A\subset E}\sum_{B\subset E}\sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)\\
&= \sum_{B\subset E}\sum_{A\subset E}\sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)+\sum_{A\subset E}\sum_{B\subset E}\mathbb{1}_B(x)-\sum_{A\subset E}\sum_{B\subset E}\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)\\
&= \sum_{B\subset E} S_1+\sum_{A\subset E} S_1 - S_2\\
&= 2.2^n.n2^{n-1}-n4^{n-1}=(4-1)n4^{n-1}=3n3^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S_3=\sum_{A,B\subset E}\mathrm{Card}(A\cup B)=3n4^{n-1}}$.