Corrigé du DM 6

1. *Puissances successives de la matrice A*

a) Calcul de $(A-I)(A-2I)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient $(1,3)$ étant : $3 \times -2 + (-3) \times -2 + (-2) \times 1 = -2$
Puis le calcul de $\big((A-I)(A-2I)\big)(A-3I)$ donne :

$$\boxed{(A-I)(A-2I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Utilisons le formalisme matriciel avec la méthode du pivot de gauss sur les lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left\{ L_2 \leftarrow L_1 - L_1 \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \boxed{-1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \right.$$

On trouve 3 pivots pour une matrice P de taille (3×3), ainsi $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

c) Après calculs, on trouve :

$$\boxed{AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = PD}$$

Multipliant par P^{-1} à droite, on trouve $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

d) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PD^nP^{-1}$.

- <u>Initialisation :</u> pour $n = 0$: $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$
pour $n = 1$, d'après 1c) $A = PDP^{-1}$.
- <u>Hérédité :</u> soit $n \geq 1$, supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Il vient :

$$A^{n+1} = A^n\ A = PD^nP^{-1}\ PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

- <u>Conclusion :</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.}$

e) Comme D est diagonale, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Le calcul de PD^n donne : $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \end{pmatrix}$.

Enfin, on trouve $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} -1+2^n+3^n & 2-2^n-3^n & 1-3^n \\ -1+3^n & 2-3^n & 1-3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+3^n & 3^n \end{pmatrix}.}$

2. a) On trouve $AC = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, puis $\boxed{AC + B = C}$.

b) Le système linéaire donné en introduction s'écrit matriciellement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B.}$

c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $X_n = C - A^n C$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C - A^0 C = C - IC = C - C = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

La relation est vérifiée au rang 0.

- Hérédité : soit $n \geq 0$, supposons que $X_n = C - A^n C$.

$$\begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & AX_n + B \text{ d'après 2b)} \\ & = & A\big(C - A^n C\big) + B \text{ par hypothèse de récurrence} \\ & = & -A^{n+1}C + AC + B \\ & = & -A^{n+1}C + C \text{ d'après 2c)} \end{array}$$

La relation est vérifiée au rang $n+1$.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = C - A^n C}$

d) D'après ce qui précède et la matrice obtenue en 1e), on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1+2^n+3^n & 2-2^n-3^n & 1-3^n \\ -1+3^n & 2-3^n & 1-3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+3^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n - 2^n \\ 3^n - 1 \\ 2 - 2^n - 3^n \end{pmatrix}}$$