DS 4

Mercredi 15 novembre 2023 – durée : 2h h

Exercice 1 - Racine carrée d'une matrice

On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A$$

   Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2.

2. a) Vérifier que $P_1^2 = P_1$ et $P_1P_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et calculer P_2P_1 et P_2^2.
   b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\left(4^{-k}P_1 + 9^{-k}P_2\right)A^k$ et en déduire que A^k est inversible.
   En déduire pour tout $k \in \mathbb{Z}$ l'expression de A^k en fonction de P_1 et P_2.

4. Trouver une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

Exercice 2 - suite d'intégrales

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$.

1. Soit f la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = (1+t)^{\frac{3}{2}}$.
   a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   b) En déduire la valeur de u_0.

2. a) Établir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente; donner sa limite.

3. a) Établir pour tout entier naturel n, à l'aide d'une intégration par parties, la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 \left(t^n + t^{n+1}\right)\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$$

   b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5}$.

4. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la question 3.b, on a : $u_n \geq \dfrac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.
   c) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 - Conditions aux limites de Dirichlet

Soit $\omega, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ avec $\omega > 0$.

1. Résoudre l'équation $(\mathcal{E}) : y'' + \omega^2 y = 0$
2. Étudier, en fonction de ω, y_0 et y_1, l'existence et l'unicité des solutions (réelle) de l'équation différentielle avec conditions aux limites de Dirichlet :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y(1) = y_1 \end{array}\right.$$

Exercice 4 - fonction de $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$

On considère l'application suivante : $f \ : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} + |z| \end{array}\right.$.

1. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. a) Déterminer l'ensemble des $w \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $f(z) = w$ ait une et une seule solution $z \in \mathbb{C}$. On note B cet ensemble.
   b) Représenter la partie B dans le plan par une partie hachurée.
3. a) Déterminer A l'image réciproque de B par f : $A = \overset{-1}{f}(B)$.
   b) Représenter sur un autre plan la partie A.
4. Que peut-on dire de l'application $\left\{\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}\right.$? Justifier.

Exercice 5

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On suppose f surjective.

1. On suppose dans cette question qu'il existe $h : F \to G$ telle que $h \circ f = g$.
   a) Montrer que, pour tout $(x, x') \in E^2$, on a : si $f(x) = f(x')$ alors $g(x) = g(x')$.
   b) Montrer que h est unique.
2. On suppose dans cette question que, pour tout $(x, x') \in E^2$, on a :
   si $f(x) = f(x')$ alors $g(x) = g(x')$.

   a) Montrer que pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $z \in G$ tel que le système $\left\{\begin{array}{ccc} f(x) & = & y \\ g(x) & = & z \end{array}\right.$ admette au moins une solution $x \in E$.
   On note $h(y)$ cet unique $z \in G$. On définit ainsi une application $h : F \to G$.
   b) Montrer que $h \circ f = g$.
   c) Montrer que h est surjective si et seulement si g est surjective.
   d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) h est injective,
   (ii) pour tout $(x, x') \in E^2$, $f(x) = f(x')$ équivaut à $g(x) = g(x')$.

Exercice 1 - Racine carrée d'une matrice

1. Les matrices P_1 et P_2 vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rrcll} P_1+ & P_2 & = & I_3 & (L_1) \\ 4P_1+ & 9P_2 & = & A & (L_2) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} 5P_1 = 9I_3 - A & (9L_1 - L_2) \\ 5P_2 = A - 4I_3 & (L_2 - 4L_1) \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{P_1 = \frac{9}{5}I_3 - \frac{1}{5}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = -\frac{4}{5}I_3 + \frac{1}{5}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

2. a) On effectue les produits matriciels demandés. On trouve $P_1^2 = P_1$; le coefficient $(3,2)$ est obtenu par : $1 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times (-1) = -1$.

   Ainsi, on trouve $\boxed{P_1^2 = P_1,\ P_1P_2 = P_2P_1 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \text{ et } P_2^2 = P_2}$.

   b) Procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ avec $\mathcal{P}(k) :\ A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2.$:

   - Initialisation : pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $4^0P_1 + 9^0P_2 = P_1 + P_2 = I_3$
     Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
   - Hérédité : Considérons $k \geq 0$ et supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\begin{array}{rcl} A^{k+1} & = & A^kA \\ & = & \big(4^kP_1 + 9^kP_2\big)\big(4P_1 + 9P_2\big) \text{ par hypth. de récurrence et par définition de } P_1 \text{ et } P_2 \\ & = & 4^{k+1}P_1^2 + 4^k \times 9P_1P_2 + 4 \times 9^kP_2P_1 + 9^{k+1}P_2^2 \\ & = & 4^{k+1}P_1 + 9^{k+1}P_2 \text{ d'après 2a)} \end{array}$$

   Donc $\mathcal{P}(k+1)$

   - Conclusion : $\boxed{\forall k\mathbb{N},\ A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2}$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on trouve $\big(4^{-k}P_1 + 9^{-k}P_2\big)A^k = I_3$ (on utilise les règles de simplification obtenues en 2a). Donc $\boxed{A^k \text{ est inversible}}$ et $\big(A^k\big)^{-1} = A^{-k} = 4^{-k}P_1 + 9^{-k}P_2$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{Z},\ A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2.}$

4. Essayons avec $B = 4^{\frac{1}{2}}P_1 + 9^{\frac{1}{2}}P_2 = 2P_1 + 3P_2$.
   Le calcul donne $B^2 = A$ (on utilise les règles de simplification obtenues en 2a).

   Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } B = 2P_1 + 3P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ vérifie } B^2 = A}$.

Exercice 2 - Suite d'intégrales

1. a) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ (l'expression étant définie et continue sur $[-1,+\infty[$ et dérivable sur $]-1,+\infty)$. Ainsi, $\boxed{\forall x \in [0,1], \quad f'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{1+t}.}$

   b) Calcul de u_0 :

$$u_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

   Ainsi, $\boxed{u_0 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}.}$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq 1+t \leq 2 \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq t^n\sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}t^n \end{aligned}$$
   Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^1 0\mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_0^1 \sqrt{2}t^n \mathrm{d}t = \sqrt{2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}.}$

   b) Comme $\frac{\sqrt{2}}{n+1} \to 0$, par encadrement, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0.}$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$; les fonctions $u : t \mapsto \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}$ et $v : t \mapsto t^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

   Par intégration par parties, il vient avec $\begin{cases} u'(t) = \sqrt{1+t} \\ v(t) = t^{n+1} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \\ v'(t) = (n+1)t^n \end{cases}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}\ \mathrm{d}t \quad &= \quad \left[\frac{2}{3}t^{n+1}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2(n+1)}{3}t^n(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t \\ &= \quad \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 t^n(1+t)\sqrt{1+t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 \left(t^n + t^{n+1}\right)\sqrt{1+t}\ \mathrm{d}t}$

   b) Pour $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$3u_{n+1} = 4\sqrt{2} - 2(n+1)\big(u_n + u_{n+1}\big) \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1}(3+2(n+1)) = 4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n$$

   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}-2(n+1)u_n}{2n+5}.}$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq t^{n+1} \leq t^n \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq t^{n+1}\sqrt{1+t} \leq t^n\sqrt{1+t} \end{aligned}$$
   Par croissance de l'intégrale, il vient : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ est décroissante.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 3b) il vient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq u_n \quad & \Rightarrow \quad \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5} - u_n \leq 0 \\ & \Rightarrow \quad \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n - (2n+5)u_n}{2n+5} \leq 0 \\ & \Rightarrow \quad 4\sqrt{2} - (4n+7)u_n \leq 0 \\ & \Rightarrow \quad u_n \geq \frac{4\sqrt{2}}{4n+7} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \frac{4\sqrt{2}}{4n+7}.}$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après 2a) et 4b),

$$\frac{4\sqrt{2}}{4n+7} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

donc $\frac{4\sqrt{2}n}{4n+7} \leq nu_n \leq \frac{\sqrt{2}n}{n+1}$.

Or $\frac{\sqrt{2}n}{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{n}} \to \sqrt{2}$ et $\frac{4\sqrt{2}n}{4n+7} = \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{7}{4n}} \to \sqrt{2}$.

<u>Par encadrement</u>, $\boxed{\text{la suite } (nu_n)_{n\geq 0} \text{ converge vers } \sqrt{2} \text{ et donc } u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n}.}$

Exercice 3 - Conditions aux limites de Dirichlet

1. Le polynôme caractéristique associée à $(\mathcal{E})$: $X^2 + \omega = 0$.
   Les racines sont $\pm i\omega$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{(\mathcal{E})} = \big\{x \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t); a, b \in \mathbb{R}\big\}.}$

2. La fonction $y : t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ vérifie les conditions aux limites de Dirichlet données si et seulement si a et b sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = y_0 \\ a\cos(\omega) + b\sin(\omega) & = y_1 \end{array}\right.$$

   Procédons par disjonction de cas :

   - Si $\sin(\omega) = 0$, c'est-à-dire s'il existe $k\mathbb{N}$ tel que $\omega = k\pi$, alors le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{r} a = y_0 \\ (-1)^k a = y_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a = y_0 \\ (-1)^k y_0 = y_1 \end{array}\right.$$

     Ce système n'a pas de solution si $y_1 \neq (-1)^k y_0$, sinon il a une infinité de solutions de la forme :

$$y(t) = y_0\cos(k\pi t) + b\sin(k\pi t)$$

   - Sinon, $\sin(\omega) \neq 0$, alors le système a une unique solution : $a = y_0$ et $b = \dfrac{1}{\sin(\omega)}\Big[y_1 - \cos(\omega)y_0\Big]$.
     Nous en déduisons que la solution est :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0\cos(\omega t) + \frac{1}{\sin(\omega)}\Big[y_1 - \cos(\omega)y_0\Big]\sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{\sin(\omega)}\Big[y(0)\underbrace{\Big[\sin(\omega)\cos(\omega t) - \cos(\omega)\sin(\omega t)\Big]}_{\sin\big(\omega(1-t)\big)} + y_1\sin(\omega t)\Big] \end{aligned}$$

   En conclusion, l'équation différentielle avec conditions aux limites de Dirichlet possède :

   - une unique solution si $\omega \neq 0[\pi]$: $y(t) = y(0)\left(\dfrac{\sin\big(\omega(1-t)\big)}{\sin(\omega)}\right) + y_1\left(\dfrac{\sin\big(\omega t)\big)}{\sin(\omega)}\right)$
   - aucune solution si $\omega = 0[\pi]$ et $y_1 \neq (-1)^k y_0$,
   - une infinité de solutions si $\omega = k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $y_1 = (-1)^k y_0$:

$$\{t \mapsto y_0\cos(k\pi t) + b\sin(k\pi t); b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4 - fonction de $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$

Étude préliminaire : soit $c+id \in \mathbb{C}$, cherchons $a+ib \in \mathbb{C}$ tel que $f(a+ib) = c+id$:

$$f(a+ib) = c+id \quad \Leftrightarrow \quad a+\sqrt{a^2+b^2} - ib = c+id \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} b = -d \\ a+\sqrt{a^2+b^2} = c \quad (\bigstar) \end{array} \right.$$

On note que $a+\sqrt{a^2+b^2} \geq 0$. Si $c<0$ alors il n'y a pas de solution.

Supposons maintenant $c \geq 0$:

$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+d^2} = c-a \quad \Leftrightarrow \quad a^2+d^2 = c^2-2ac+a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2ac = c^2-d^2$$

Si $c=0$, alors il y a une solution uniquement si $d=0$. Dans ce cas, les solutions sont $\mathbb{R}_-$.

Si $c \neq 0$ alors $(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{c^2-d^2}{2c}$

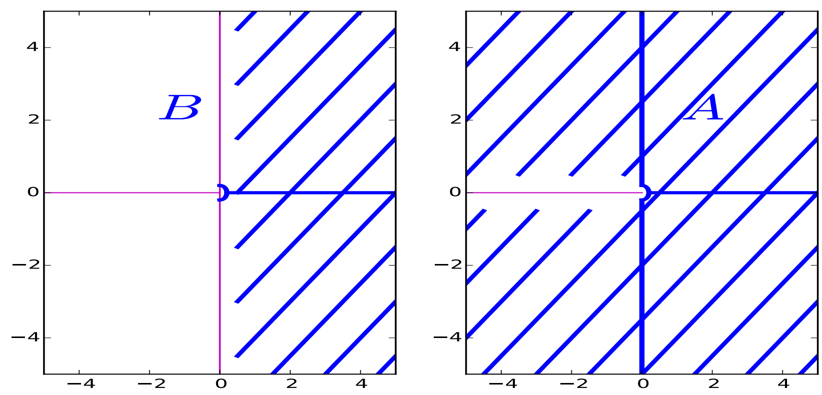
1. $\boxed{\text{L'application } f \text{ n'est pas injective}}$ car 0 possède plusieurs antécédent : $f(-1) = f(0) = 0$.

   $\boxed{\text{L'application n'est pas surjective}}$ car -1 n'admet pas d'antécédent ; plus généralement, tous les complexe de partie réelle strictement négative et ceux de $i\mathbb{R}^*$ n'ont pas d'antécédent.

   $\boxed{\text{L'application n'est pas bijective}}$ car, en particulier, elle n'est pas injective.

2. a) L'ensemble des $w \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $f(z) = w$ ait une et une seule solution $z \in \mathbb{C}$ est $\boxed{B = \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} = \left\{c+id; c \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } d \in \mathbb{R}\right\}}$.

   b) Représentations graphiques :



3. a) D'après l'étude préliminaire $\boxed{A = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-}$.

   Approche 1 : $f(\mathbb{C}) = B \cup \{0\}$ et $f^{-1}\big(\{0\}\big) = \mathbb{R}_-$ donc $f^{-1}(B) = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

   Approche 2 : $A = \left\{\dfrac{c^2-d^2}{2c} - id;\ c \in \mathbb{R}_+^*, d \in \mathbb{R}\right\}$.

   Puis on montrer par double inclusion que $A = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

   b) Voir ci-dessus.

4. $\boxed{\text{L'application } \left\{ \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \right. \text{ est bijective}}$: injective (d'après 2a) et surjective (d'après 3a).

Exercice 5

1. a) Soit $x, x' \in E$, alors en composant par h on obtient :

$$f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad h(f(x)) = h(f(x')) \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(x')$$

Ainsi, $\boxed{\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(x').}$

b) Soit $h_1, h_2 \in G^F$ telles que $h_1 \circ f = g$ et $h_2 \circ f = g$.
Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Alors $h_1(y) = h_1(f(x)) = g(x) = h_2(f(x)) = h_2(y)$. Donc $\boxed{h \text{ est unique.}}$

2. a) Soit $y \in F$. Comme f est surjection, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution.
De plus, l'hypothèse donne que pour tout antécédent x de y, $f(x)$ est constant par définition et donc $g(x)$ aussi : il existe un unique $z \in G$ tel que $g(x) = z$.

Ainsi, $\boxed{\forall y \in F, \exists! z \in G \text{ tel que le système } \left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & y \\ g(x) & = & z \end{array} \right. \text{ admette au moins une solution } x \in E.}$

b) Soit $x \in E$, notant $y = f(x)$ et $z = g(x)$ alors par construction $h(y) = z$ c'est-à-dire $h(f(x)) = g(x)$. Ainsi, $\boxed{h \circ f = g.}$

c) $$\begin{array}{rll} h \text{ est surjective} & \Leftrightarrow & \forall z \in G, \exists y \in F ; h(y) = z \\ & & \quad \text{comme } f \text{ est surjective, posant } f(x) = y \\ & \Leftrightarrow & \forall z \in G, \exists x \in E ; h(f(x)) = z \\ & \Leftrightarrow & \forall z \in G, \exists x \in E ; g(x) = z \\ & \Leftrightarrow & g \text{ est surjective} \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est surjective si et seulement si } g \text{ est surjective.}}$

d) Raisonnons par double implication.
$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ L'implication $\Leftarrow$ est donnée par hypothèse.
Montrons l'autre implication : soit $x, x' \in E$ tels que $g(x) = g(x')$ et donc $h(f(x)) = h(f(x'))$.
Comme h est injective, il vient $f(x) = f(x')$.
$\boxed{(i) \Leftarrow (ii)}$ Soit $y, y' \in F$ tels que $f(y) = f(y')$.
Comme f est surjective, il existe $x, x' \in E$ tel $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Ce qui donne

$$h(f(x)) = h(f(x')) \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(x') \quad \Rightarrow_{\text{d'après } (ii)} \quad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad y = y'$$

donc h est injective.
Ainsi, $\boxed{h \text{ est injective si et seulement si } \big(\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = g(x')\big).}$