DM 7

à rendre le lundi 27 novembre 2023

Calcul de $\zeta(2)$

1. Montrer que

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

2. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,\pi]$,

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{1}{2}\frac{\sin(Nt)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cos(Nt) - \frac{1}{2}$$

3. Soit f un application de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire que f est dérivable et que f et f' sont continues. On admet qu'une application continue sur un segment est bornée. Montrer que

$$\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \int_0^\pi f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

4. En déduire[1] que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

puis déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}$

[1]Cette formule est dûe à Euler (1707-1783)