Corrigé du DM 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications $u : t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{n}\sin(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, par intégration par parties on a :

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t \\ v'(t) = \cos(nt) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = \dfrac{t}{\pi} - 1 \\ v(t) = \dfrac{1}{n}\sin(nt) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= 0 - 0 - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

A nouveau, les applications $t \mapsto \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{n^2}\cos(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\mathrm{d}t &= \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(-\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right)\mathrm{d}t \\ &= 0 - (-1)\left(-\frac{1}{n^2\pi}\right) + \frac{1}{n^2}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3\pi}\left[\sin(nt)\right]_0^\pi = -\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$

2. Procédons par récurrence pour $t \in]0,\pi]$:

- Initialisation : Pour $N = 0$, on trouve que les deux membres sont nuls.

Pour $N = 1$, $\sum_{n=1}^{1}\cos(nt) = \cos(t)$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} \\ &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\cos(t) + 1) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} = \cos(t) \end{aligned}$$

Donc la relation est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

- Hérédité : Soit $N \geq 1$. Supposons la relation vraie au rang N.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N+1}\cos(nt) &= \sum_{n=1}^{N}\cos(nt) + \cos((N+1)t) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin(Nt)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2}\left(\cos(Nt) + \cos((N+1)t)\right) + \frac{1}{2}\cos((N+1)t) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin(Nt)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} + \cos((N+\tfrac{1}{2})t)\cos(\tfrac{1}{2}t) + \frac{1}{2}\cos((N+1)t) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\left(\sin(Nt) + 2\cos((N+\tfrac{1}{2})t)\sin(\tfrac{1}{2}t)\right) + \frac{1}{2}\cos((N+1)t) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\sin((N+1)t) + \frac{1}{2}\cos((N+1)t) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc la relation est vérifiée au rang $N+1$.

- Conclusion : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,\pi],\ \sum_{n=1}^{N}\cos(nt) = \frac{1}{2}\frac{\sin(Nt)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cos(Nt) - \frac{1}{2}.}$

3. Soit u et $v : t \mapsto -\frac{1}{n}\cos(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi u(t)\sin(nt)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)u(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{n}\cos(nt)u'(t)\mathrm{d}t \\
\left|\int_0^\pi u(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| &\underset{\text{Inégalité triangulaire}}{\leq} \left|\frac{1}{n}\cos(n\pi)u'(\pi)\right| + \left|\frac{1}{n}u'(0)\right| + \left|\int_0^\pi -\frac{1}{n}\cos(nt)u'(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\underset{\text{Croissance de l'intégrale}}{\leq} \frac{1}{n}\left(|u'(\pi)| + |u'(0)| \int_0^\pi |u'(t)|\mathrm{d}t\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Par encadrement $\boxed{\int_0^\pi u(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

De même, on montre que $\boxed{\int_0^\pi u(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, d'après 1) on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{m}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&\text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&\text{d'après 2)} \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\sin(Nt)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cos(Nt) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&\text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \underbrace{\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{2}\frac{\sin(Nt)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0} + \underbrace{\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{2}\cos(Nt)\mathrm{d}t}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\mathrm{d}t}_{=\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi t - \frac{t^2}{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi $\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

De plus, $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \to \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$.

Et $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^2} \to \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$

Ainsi, $\boxed{\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24} \text{ et } \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$