Corrigé du DM 8

1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f' : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. De plus $\lim\limits_0 f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ par opération algébrique.

Le tableau de variations est :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \lim\limits_0 f = -\infty \text{ et } \lim\limits_{+\infty} f = +\infty.}$

b) Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de la bijection donne que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}$.
Or, pour $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, n possède un unique antécédent par f noté u_n.
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists! u_n \in \mathbb{R}_+^* ; u_n + \ln(u_n) = n.}$

2. a) La tableau de variation de f^{-1}, la fonction réciproque de f, est :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{-1}(n)$.
Comme (n) et f^{-1} sont croissantes alors $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

b) Comme $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$ alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

3. a) Comme $u_n \to +\infty$ alors $\ln(u_n) = o(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n + \ln(u_n) = n \quad \Rightarrow \quad n = u_n + o(u_n) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_n \sim n}$$

b) Pour $n \geq 2$,

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\ n\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) + \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln(n)} + 1 \to 0 + 1 = 1$$

Ainsi, $\boxed{\ln(u_n) \sim \ln(n).}$
Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - n = \ln(u_n)$; ainsi, par transitivité de l'équivalence, $\boxed{u_n - n \sim -\ln(n).}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n - n + \ln(n) = -\ln(u_n) + \ln(n) = \ln\left(\frac{n}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n + \ln(u_n)}{u_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - n + \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right).}$

On sait déjà que $\ln(u_n) = o(u_n)$ donc $\frac{\ln(u_n)}{u_n} \to 0$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{\ln(u_n)}{u_n}\right) \sim \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$ et donc

$$u_n - n + \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Ainsi, $\boxed{u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$