Corrigé du DM 9

Étude d'une suite récurrente d'ordre 2

1. a) Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n soit bien défini. En particulier, montrons par récurrence sur n que $u_n > 0$, a fortiori $\ln(1+u_n)$ est défini.

- Initialisation : Pour $n \in \{0, 1\}$, l'énoncé donne $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.
- Hérédité : Considérons $n \geq 1$, on suppose $u_n > 0$ et $u_{n-1} > 0$. Il vient que $\ln(1+u_n) > 0$ et $\ln(1+u_{n+1}) > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.
- Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0.}$

b) Script PYTHON affichant u_n :

```
import numpy as np
u=eval(input('Donner u0 : '))
v=eval(input('Donner u1 : '))
n=eval(input('Donner n : '))
for i in range(2,n):
    w=np.log(1+u)+np.log(1+v)
    u=v
    v=w
if n==0:
    print(u)
else:
    print(v)
```

Ce qui donne :

```
>>> Donner u0 : 1
>>> Donner u1 : 2
>>> Donner n : 12
2.4851281686791546
```

c) Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $u_{n+1} \to \ell$ et par continuité de ln et opération sur les limites,

$$\ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n-1}) \to \ln(1+\ell) + \ln(1+\ell) = 2\ln(1+\ell)$$

Par unicité de la limite, ℓ vérifie : $\ell = 2\ln(1+\ell)$.
Ainsi, $\boxed{\text{la limite finie éventuelle de } (u_n) \text{ est un point fixe de } \varphi.}$

2. a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \frac{2}{1+x} - 1 = \frac{1-x}{1+x}$$

Tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$2\ln(2)-1$	$\searrow$	$-\infty$

avec $2\ln(2)-1 \approx 0,38 > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ par croissance comparée.
La fonction g est continue sur $[0,1]$, strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0;1]$ sur $[0;2\ln(2)-1]$. Ainsi, 0 possède un unique antécédent par g sur $[0;2]$ qui est 0.
On note que $g(3) = 2\ln(4) - 3 = 4\ln(2) - 3 \approx -0.24 < 0$. Donc $0 \in [g(3); g(1)]$.
De même, g réalise un bijection de $[1,3]$ sur $[g(3); g(1)]$ (et de $[1; +\infty[$ sur $[-\infty; g(1)]$), donc 0 possède un unique antécédent par g sur $[1; +\infty]$ qui se trouve dans $[1;3]$, noté ℓ.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ possède exactement deux points fixes sur } \mathbb{R} : 0 \text{ et } \ell \in [1;3].}$

b) Construction des deux suites par récurrence.

- Initialisation : On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 3$. D'après 2a), $\ell \in]1,3]$ (avec $g(1) \neq 0$).
- Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose construit $a_n, b_n \in [1,3]$ tel que $a_n < \ell \geq b_n$.

On considère $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
➢ Si $g(c) > 0$ alors on pose $a_{n+1} = c$ et $b_{n+1} = b_n$.
➢ Sinon on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c$.
En particulier, $g(b_n) \leq 0 < g(a_n)$ donne, d'après la bijection évoquée en 2a) : $a_n < \ell \leq b_n$.

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont constructibles et vérifient $a_n < \ell \leq b_n$. La suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante, la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in [0,1[$ donc convergente vers 0 : les deux suites sont adjacentes.

Donc, elle converge vers la même limite. Par passage à la limite, on trouve

$$\lim a_n \leq \ell \leq \lim b_n = \lim a_n$$

$\boxed{\text{Les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes et convergent vers } \ell.}$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n < \ell \leq b_n \quad \Rightarrow \quad \left| \ell - \frac{a_n + b_n}{2} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Un script de la fonction `limWhile(p)` est :

```python
def limWhile(p):
    a,b=1,3
    while b-a>2*p:
        c=(a+b)/2
        if 2*np.log(1+c)>c:
            a=c
        else:
            b=c
    return (a+b)/2
```

Ce qui donne :

```
>>> limWhile(0.000001)
2.512862205505371
```

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a plus précisément :

$$\left| \ell - \frac{a_n + b_n}{2} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

Donc, si n vérifie $\dfrac{1}{2^n} \leq \mathtt{p}$, alors $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ est une approximation de ℓ à la précision `p` (au moins).

$$\frac{1}{2^n} \leq \mathtt{p} \quad \Leftrightarrow \quad -n\ln(2) \leq \ln(\mathtt{p}) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(\mathtt{p})}{\ln(2)}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Pour } n = \left\lfloor -\dfrac{\ln(\mathtt{p})}{\ln(2)} \right\rfloor + 1,\ \dfrac{a_n+b_n}{2} \text{ est une approximation de } \ell \text{ à la précision } \mathtt{p}.}$

Un script de la fonction `limFor(n)` est :

```
def limFor(p):
    a,b=1,3
    n=floor(-np.log(p)/np.log(2))+1
    for i in range(1,n):
        c=(a+b)/2
        if 2*np.log(1+c)>c:
            a=c
        else:
            b=c
    return (a+b)/2
```

3. a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour montrer $s_n \leq u_n \leq t_n$.

- Initialisation : Par construction, (définition de min et max) on a $s_0 \leq u_0 \leq t_0$ et $s_1 \leq u_1 \leq t_1$.
- Hérédité : Pour $n \geq 1$, on suppose la relation vraie aux rang $n-1$ et n.

Comme ln est croissante, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} s_{n-1} \leq u_{n-1} \leq t_{n-1} \\ s_n \leq u_n \leq t_n \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} 1+s_{n-1} \leq 1+u_{n-1} \leq 1+t_{n-1} \\ 1+s_n \leq 1+u_n \leq 1+t_n \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \ln(1+s_{n-1}) \leq \ln(1+u_{n-1}) \leq \ln(1+t_{n-1}) \\ \ln(1+s_n) \leq \ln(1+u_n) \leq \ln(1+t_n) \end{cases} \\
& \qquad \text{par sommation des inégalités} \\
& \Rightarrow s_{n+1} \leq u_{n+1} \leq t_{n+1}
\end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ s_n \leq u_n \leq t_n.}$

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $s_n - s_{n-1} \geq 0$

- Initialisation : Par définition $s_1 = s_0$ donc $s_1 \geq s_0$.

De plus, $s_2 = 2\ln(1+s_0) = \varphi(s_0)$ et $s_0 \leq 1$. L'étude des variation de g donne le tableau de signe suivant :

x	0		ℓ		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

Il vient $g(s_0) \geq 0$ et donc $\varphi(s_0) \leq s_0$. Donc $s_2 \geq s_0 = s_1$.

La relation est établie pour $n=1$ et $n=2$.

- Hérédité : Soit $n \geq 2$ on suppose la relation vérifiée au rang n et $n-1$.

$$\begin{aligned}
s_{n+1} - s_n &= \ln(1+s_n) + \ln(1+s_{n-1}) - \big(\ln(1+s_{n-1}) + \ln(1+s_{n-2})\big) \\
&= \underbrace{\ln(1+s_n) - \ln(1+s_{n-1})}_{\geq 0 \text{ par HR}} + \underbrace{\ln(1+s_{n-1}) - \ln(1+s_{n-2})}_{\geq 0 \text{ par HR}} \geq 0
\end{aligned}$$

La relation est vérifiée au rang $n+1$.

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \geq s_{n-1}$. $\boxed{\text{La suite } (s_n) \text{ est croissante.}}$

c) La suite (s_n) est croissante est majorée par t_0 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n \leq t_0$ la suite (t_n) étant décroissante. Le théorème de limite monotone donne que la suite (s_n) converge.

D'après 1c), on a que la limite de (s_n) est un point fixe de φ : soit 0, soit ℓ.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < s_0 \leq s_n$. Par passage à la limite, on a $\lim s_n \geq s_0 > 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (s_n) \text{ converge vers } \ell.}$

De façon analogue, on peut montrer que la suite (t_n) est décroissante, minorée par s_0, donc convergente vers un point fixe de φ qui est supérieur à s_0 donc qui est ℓ.

Par encadrement, $\boxed{\text{la suite } u_n \text{ converge vers } \ell.}$