Corrigé du DM 10

Comportement asymptotique d'une suite implicite

1. **f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$**

f est définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable, de dérivée : $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 1 + \dfrac{1}{x}$
On en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

$$f(x) = x^4\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{\ln(x)}{x^4}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x + \ln(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0^4 + 2\times 0^3 + 0 - \infty = -\infty$$

Le tableau de variation de f est donc :

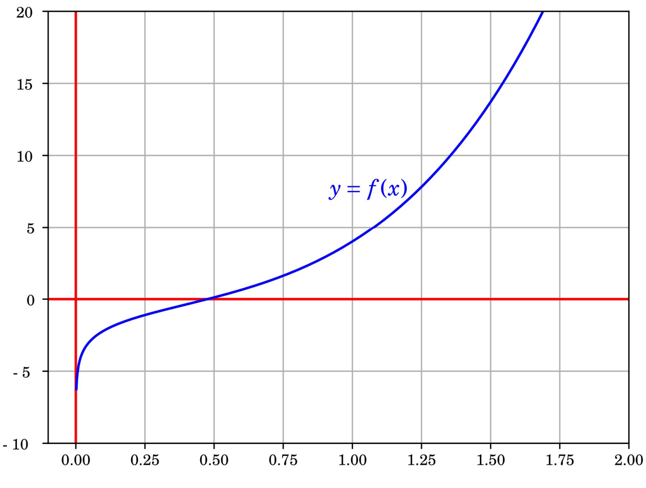
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est continue, strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$; donc, d'après le théorème de la bijection,
$\boxed{f \text{ définit une bijection de } \left]0,+\infty\right[\text{ sur } \left]-\infty,+\infty\right[.}$

$f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$ donc le graphe de f a une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$$\frac{f(x)}{x} = x^3\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{\ln(x)}{x^4}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Donc le graphe de f a un branche parabolique de direction (Oy) lorsque $x \to +\infty$. L'allure du graphe de f est donc (dans un repère qui n'est pas orthonormé) :



2. **Définition de la suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
f définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$. Si on note f^{-1} la bijection réciproque de f, nous en déduisons que, pour tout $n\in\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$, n possède un unique antécédent par f : l'équation d'inconnue $x>0$: $\boxed{f(x)=n \text{ a une unique solution } x_n=f^{-1}(n).}$

3. **Montrons que** $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
Calculons : $f\left(\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{n}{2^4}+\frac{2n^{\frac{3}{4}}}{2^3}+\frac{n^{\frac{1}{4}}}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}\right)$
Il vient :

$$f\left(\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}\right)-f(x_n)=f\left(\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}\right)-n\sim-\frac{15n}{16}$$

Comme $-\frac{15n}{16}<0$ a.p.c.r. alors $f\left(\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}\right)-f(x_n)$ aussi.
Ainsi $f\left(\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}\right)\leq f(x_n)$ a.p.c.r.
Comme f^{-1} est croissante alors $\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}\leq x_n$ a.p.c.r.
Par comparaison, comme $\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, nous en déduisons : $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

4. **Équivalent simple de** x_n
Puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, nous en déduisons :

$$n=f(x_n)=x_n^4+o(x_n^4) \qquad \text{donc } x_n^4\sim n$$

Il est possible de composer un équivalent pour une fonction puissance. Ainsi, $\boxed{x_n\sim n^{\frac{1}{4}}}$

5. **Développement asymptotique**
Introduisons une nouvelle suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$x_n=n^{\frac{1}{4}}(1+\alpha_n)$$

Comme $x_n\sim n^{\frac{1}{4}}$, alors $1+\alpha_n\to 1$ et donc $\alpha_n\to 0$.
Calculons $f(x_n)$:

$$f(x_n)=n(1+\alpha_n)^4+2n^{\frac{3}{4}}(1+\alpha_n)^2+n^{\frac{1}{4}}(1+\alpha_n)+\ln\left(n^{\frac{1}{4}}(1+\alpha_n)\right)$$

Comme $f(x_n)=n$, nous en déduisons, en regroupant les termes n à gauche :

$$n\left(1-(1+\alpha_n)^4\right)=2n^{\frac{3}{4}}(1+\alpha_n)^2+n^{\frac{1}{4}}(1+\alpha_n)+\ln\left(n^{\frac{1}{4}}(1+\alpha_n)\right)$$

Le calcul d'un équivalent pour chaque membre donne :

$$-4n\alpha_n\sim 2n^{\frac{3}{4}}$$
$$\alpha_n\sim-\frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}} \quad\Rightarrow\quad \alpha_n=-\frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$$
$$\text{Ainsi, } x_n=n^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}}+o\left(\frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}}\right)\right)$$

Ainsi, après simplification : $\boxed{x_n=n^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}+o(1)}$

6. **Suite du développement asymptotique**
Nous pouvons donc écrire :

$$x_n = n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} + \epsilon_n$$

avec $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En posant $u_n = n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} x_n^4 &= (u_n + \epsilon_n)^4 \\ &= u_n^4 + 4\epsilon_n u_n^3 + 6\epsilon_n^2 u_n^2 + 4\epsilon_n^3 u_n + \epsilon_n^4 \end{aligned}$$

Comme $u_n \sim n^{\frac{1}{4}}$, nous savons que $u_n^3 \sim n^{\frac{3}{4}}$. Sachant de plus que $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} x_n^4 &= u_n^4 + 4\epsilon_n n^{\frac{3}{4}} + o\left(\epsilon_n n^{\frac{3}{4}}\right) \\ \text{De même :} x_n^3 &= u_n^3 + 3\epsilon_n n^{\frac{2}{4}} + o\left(\epsilon_n n^{\frac{2}{4}}\right) = u_n^3 + o\left(\epsilon_n n^{\frac{3}{4}}\right) \\ x_n &= u_n + o\left(\epsilon_n n^{\frac{3}{4}}\right) \\ \ln(x_n) &= \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{u_n}\right) = \ln(u_n) + \frac{\varepsilon_n}{u_n} + o\left(\frac{\varepsilon_n}{u_n}\right) = \ln(u_n) + o\left(\epsilon_n n^{\frac{3}{4}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi : $f(x_n) = f(u_n) + 4\epsilon_n n^{\frac{3}{4}} + o\left(\epsilon_n n^{\frac{3}{4}}\right)$
Calculons un développement $f(u_n)$ en ne gardant que les deux termes dominants :

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \left(n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^4 + 2\left(n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right) \\ &= n - \frac{4n^{\frac{3}{4}}}{2} + \frac{6n^{\frac{2}{4}}}{4} - \frac{4n^{\frac{1}{4}}}{8} + \frac{1}{16} + 2n^{\frac{3}{4}} - \frac{6n^{\frac{2}{4}}}{2} + \frac{6n^{\frac{1}{4}}}{4} - \frac{1}{8} - \frac{6n^{\frac{2}{4}}}{2} + n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} + \ln\left(n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right) \\ &= n - \frac{3n^{\frac{2}{4}}}{2} + o\left(n^{\frac{2}{4}}\right) \end{aligned}$$

En réinjectant dans l'expression de $f(x_n) = n$:

$$n = \underbrace{n - \frac{3n^{\frac{2}{4}}}{2} + o\left(n^{\frac{2}{4}}\right)}_{f(u_n)} + 4\epsilon_n n^{\frac{3}{4}} + o\left(\epsilon_n n^{\frac{3}{4}}\right)$$

En regroupant : $\frac{3n^{\frac{2}{4}}}{2} + o\left(n^{\frac{2}{4}}\right) = 4\epsilon_n n^{\frac{3}{4}} + o\left(\epsilon_n n^{\frac{3}{4}}\right)$
Donc : $\frac{3n^{\frac{2}{4}}}{2} \sim 4\epsilon_n n^{\frac{3}{4}}$ ou encore $\epsilon_n \sim \frac{3}{8n^{\frac{1}{4}}}$
Ainsi, $\boxed{x_n = n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{\frac{1}{4}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)}$

On peut continuer le développement asymptotique, mais il est clair qu'il convient de développer des outils de calcul un peu plus sophistiqués pour continuer le développement asymptotique. . .