DS 6

Mercredi 20 décembre 2023 – durée 2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Toutes les matrices en jeu dans cet exercice sont considérées comme éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels.
Une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dite involutive si et seulement si $M^2 = I$.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. a) Montrer que $M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I$.
   b) En déduire que M est inversible si et seulement si : $ad - bc \neq 0$.
   c) Dans le cas où $ad - bc \neq 0$, écrire M^{-1} en fonction seulement de a, b, c et d.

2. a) Montrer que la matrice αI, α désignant un nombre réel, est involutive si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.
   b) On suppose, dans cette question que $M \neq I$ et $M \neq -I$.
   Montrer que M est involutive si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Trouver un nombre réel α tel que $A = \alpha I + B$, B étant une matrice involutive.
   b) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$A^n = \frac{1}{2}(3^n + 1)I + \frac{1}{2}(3^n - 1)B$$

   c) Montrer que A est inversible et vérifier que la formule trouvée en 3.b) est encore valable pour $n = -1$.
   d) Montrer que la formule trouvée en 3.b) est valable pour tout nombre entier relatif.

Problème 2

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Partie A – Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

Partie B – Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$

3. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

   En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

4. En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

5. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.
6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$$

   En passant à la limite pour n fixé et $k \to +\infty$ dans l'encadrement de la question B4), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$$

   En déduire, lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$$

7. On définit pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$.
   Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\beta_n - 1 = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n)$$

8. Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} + o(1)$$

Exercice 3 - Produit de convolution

Si u et v sont deux suites réelles, on appelle *produit de convolution* de u et v la suite $w = u \star v$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

1. Soient a et b des réels fixés. On pose, dans cette question uniquement :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^n}{n!} \ \text{ et } \ v_n = \frac{b^n}{n!}.$$
Déterminer le produit de convolution $w = u \star v$ des suites u et v ; c'est-à-dire donner une expression explicite du terme w_n.

2. On suppose que u et v sont deux suites convergentes. Le produit de convolution $u \star v$ est-il nécessairement convergent ?

3. On suppose, pour cette question seulement, que $u = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la suite v est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution.

   a) Montrer que, $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leq u_n$.

   b) Utilisant la décroissance de (v_n), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$w_{2n} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_0$$

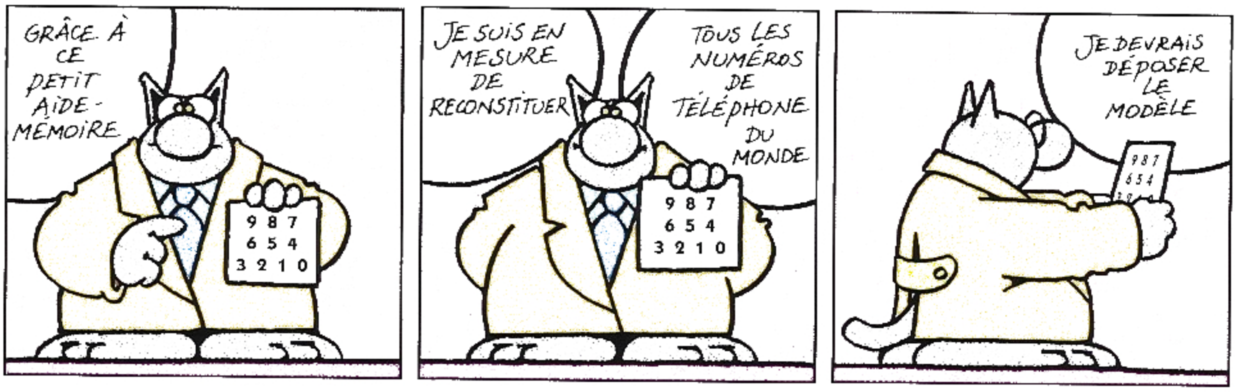
   c) Puis en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$w_{2n} \leq v_0 u_n + 2v_n$$

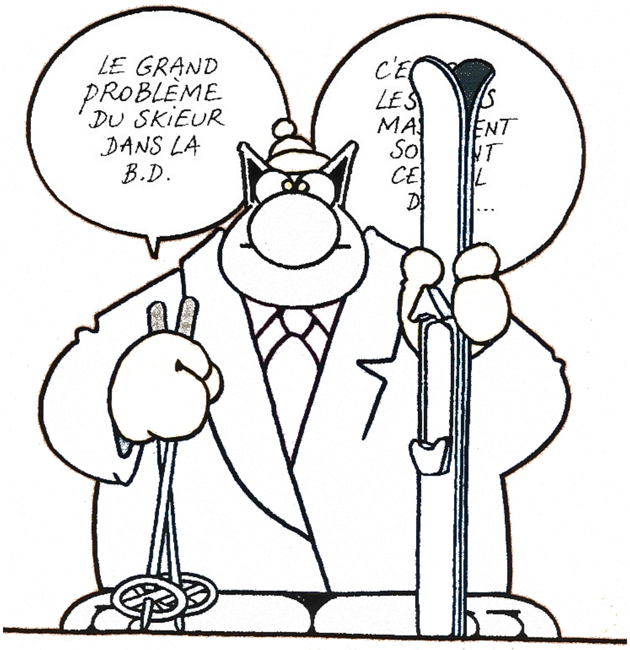
   d) De même, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$w_{2n+1} \leq v_0 u_n + 2v_{n+1}$$

   e) En déduire que le produit de convolution w converge, et préciser sa limite.

4. On suppose que $u = \left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la suite v est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution. Montrer, à l'aide de la question précédente, que la suite w converge, et préciser sa limite.

FIN DE L'ÉNONCÉ


GRÂCE À CE PETIT AIDE-MÉMOIRE
987
654
3210
JE SUIS EN MESURE DE RECONSTITUER
TOUS LES NUMÉROS DE TÉLÉPHONE DU MONDE
JE DEVRAIS DÉPOSER LE MODÈLE


LE GRAND PROBLÈME DU SKIEUR DANS LA B.D.


MEILLEURS VOEUX POUR TOUTE LA VIE
COMME ÇA, C'EST FAIT UNE FOIS POUR TOUTES

Exercice 1

1. a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad (a+d)M-(ad-bc)I &= \begin{pmatrix} a^2+ad & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+ad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{M^2 = (a+d)M-(ad-bc)I}$.

b) Procédons par double implication :

• $\boxed{\Leftarrow}$ Comme $ad-bc \neq 0$ alors la relation de 1a) donne :

$$I = \frac{1}{ad-bc}\left((a+d)M-M^2\right) = \frac{1}{ad-bc}\left((a+d)I-M\right)M$$

Ainsi, M est inversible et $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\left((a+d)I-M\right)$.

• $\boxed{\Rightarrow}$ Raisonnons par l'absurde ; supposons que M est inversible et que $ad = bc$.
La relation du 1a) donne : $M^2 = (a+d)M$
Multipliant par M^{-1} on obtient :

$$\begin{aligned} M = (a+d)I \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = a+d \\ c = 0 \\ b = 0 \\ d = a+d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad a=b=c=d=0 \quad \Leftrightarrow \quad M = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Or la matrice nulle n'est pas inversible donc M non plus, ce qui contredit l'hypothèse.
⇛ *La notion de rang d'une matrice (nombre de pivots obtenus lors de la réduction par le pivot de Gauss) aurait pu être utilisée.*
Ainsi, $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si : } ad-bc \neq 0}$.

c) Considérant $ad-bc \neq 0$, alors $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\left((a+d)I-M\right) = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}$.

2. a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha I)^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 I = I \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \{\pm 1\}$$

Ainsi, $\boxed{\alpha I \text{ est un involution si et seulement si } \alpha \in \{\pm 1\}}$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $M \neq I$ et $M \neq -I$. D'après 1a), on a :

$$\begin{aligned} (\bigstar) \quad M^2 = I \quad &\Leftrightarrow \quad (a+d)M-(ad-cb+1)I = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a(a+d)-(ad-cb+1) = 0 \\ (a+d)c = 0 \\ (a+d)b = 0 \\ d(a+d)-(ad-cb+1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2+cb-1 = 0 \\ (a+d)c = 0 \\ (a+d)b = 0 \\ d^2+cb-1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Discutons suivant deux cas :

- si $a+d=0$:

$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad (ad-cb+1)I = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad ad-cb=-1$$

Donc M est une involution si et seulement si $ad-cb=-1$.

- si $a+d\neq 0$:

$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} b=c=0 \\ a^2=d^2=1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} b=c=0 \\ a,d\in\{\pm1\} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} b=c=0 \\ a=d=1 \text{ ou } a=d=-1 \end{array}\right. \quad \text{car } a\neq -d$$

Donc M est une involution si et seulement si $M=I$ ou $M=-I$.

Ainsi, $\boxed{\text{Si } M\neq I \text{ et } M\neq -I, \text{ alors } M \text{ est involutive si et seulement si } a+d=0 \text{ et } ad-bc=-1}$.

3. Soit $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Cherchons $\alpha\in\mathbb{R}$ et $B=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tels que $A=\alpha I+B$ et B soit involutive.

Par identification on trouve $c=-4$ et $b=2$. Ainsi $B\neq \pm I$ et donc, étant une involution, on a $a+d=0$ et $ad-2\times(-4)=-1$.

$$A=\alpha I+B \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha+a=5 \\ \alpha-a=-1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha=2 & L_1\leftarrow \frac{1}{2}(L_1+L_2) \\ a=3 & L_2\leftarrow \frac{1}{2}(L_1-L_2) \end{array}\right.$$

On note que $ad-bc=-9+8=-1$ et $a+d=0$ donc B est une involution.

Ainsi, il existe une unique décomposition souhaitée : $\boxed{A=2I+B \text{ avec } B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}$.

b) On note que $2I\times B=2B=B\times(2I)$. Les deux matrice commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton. Soit $n\in\mathbb{N}$:

$$A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I)^{n-k}B^k$$

On a $(2I)^{n-k}=2^{n-k}I$ et comme B est involutive, une récurrence permet d'établir que $B^k=I$ si k est pair et $B^k=B$ si k est impair : $B^2=I$, $B^3=B$, $B^4=I$, ...

Découpons la somme en séparant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair :

$$A^n=\underbrace{\sum_{2p\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{2p}(2I)^{n-2p}B^{2p}}_{\text{termes d'indice pair}}+\underbrace{\sum_{2p+1\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{2p+1}(2I)^{n-2p-1}B^{2p+1}}_{\text{termes d'indice impair}}$$

⇛ *Technique à assimiler et mémoriser.*

Posons $R=\sum_{2p\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{2p}(2I)^{n-2p}$ et $S=\sum_{2p+1\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{2p+1}(2I)^{n-2p-1}$.

Alors $A=R\times I+S\times B$.

Calculons R et S en établissant un système linéaire qu'elles vérifient :

$$R+S=\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{k}2^{n-k}\times 1^k=(2+1)^n=3^n \qquad \underline{\text{formule du binôme}}$$
$$R-S=\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{k}2^{n-k}\times(-1)^k=(2-1)^n=1$$

Il vient, $R = \dfrac{3^n+1}{2}$ et $S = \dfrac{3^n-1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{2}(3^n+1)I + \frac{1}{2}(3^n-1)B}$.

c) et d) $\Rrightarrow$ *On pourrait appliquer le critère du cours pour obtenir l'inversibilité :* $5(-1)-2(-4) = 3 \neq 0$ *donc* A *est inversible.*
Ici, il suffit de vérifier que le candidat proposé par l'énoncé (c'est-à-dire remplacer n *par* -1*) convient.*
Généralisons l'approche pour répondre en même temps à la question 3.d)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C = \frac{1}{2}(3^{-n}+1)I + \frac{1}{2}(3^{-n}-1)B$ et calculons $C \times A^n$:

$$\begin{aligned}
CA^n &= \left(\frac{1}{2}(3^{-n}+1)I + \frac{1}{2}(3^{-n}-1)B\right)\left(\frac{1}{2}(3^n+1)I + \frac{1}{2}(3^n-1)B\right) \\
&= \frac{1}{4}(1+3^{-n}+3^n+1)I + \frac{1}{4}(1-3^{-n}+3^{-n}-1)B \\
&\qquad \frac{1}{4}(1+3^{-n}-3^{-n}-1)B + \frac{1}{4}(1-3^{-n}-3^{-n}+1)B^2 \\
&= \frac{4}{4}I + 0B \text{ car } B^2 = I
\end{aligned}$$

Donc A^n est inversible et son inverse est C.
Ainsi, pour $n=1$, on vient de montrer que $\boxed{A \text{ est inversible}}$.
De plus, $\boxed{\text{l'expression du 3.b) évaluée en } -n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ donne } A^{-n}.}$

Problème 2

Partie A – Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0 = a > 0$. La suite est strictement positive.
La relation précédente devient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite est strictement positive et strictement croissante.}}$

2. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors elle admet une limite soit finie, soit $+\infty$.
Montrons par l'absurde que la limite est infinie :

   Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
   On a : $u_n \to \ell$, $u_{n+1} \to \ell$, $u_n^2 \to \ell^2$
   Les opérations algébriques et l'unicité de la limite donne :

$$\ell = \ell + \ell^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 0$$

   Or, pour tout n, $u_n \geq a > 0$, par passage à la limite on a $\ell \geq a > 0$ ce qui est contradictoire.

   Ainsi, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge et tend vers } +\infty.}$

Partie B – Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(u_n + u_n^2\right) - \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(u_n^2\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

   Soit $p \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons : $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_{n+p}}\right)$
   Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leq u_{n+p} \quad &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{u_{n+p}} \leq \frac{1}{u_n} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante} \\ &\Rightarrow \quad 1 < 1 + \frac{1}{u_{n+p}} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \\ &\Rightarrow \quad 0 < \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \text{ car ln est croissante} \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \text{ et } 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)}$$

4. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Introduisons une somme téléscopique :

$$v_{n+k+1} - v_n = (v_{n+k+1} - v_{n+k}) + (v_{n+k} - v_{n+k-1}) + \cdots + (v_{n+1} - v_n) = \sum_{i=0}^{k} (v_{n+i+1} - v_{n+i})$$

Or, pour tout $i \geq 0$, nous avons démontré :

$$0 < v_{n+i+1} - v_{n+i} \leq \frac{1}{2^{n+i+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Par sommation pour $i \in [\![0, k]\!]$:

$$\begin{aligned} 0 < v_{n+k+1} - v_n &\leq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{n+i+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k, n \in \mathbb{N},\ 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)}$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 0$ et $k = p - 1$, nous en déduisons

$$0 < v_p - v_0 \leq \frac{1}{2^0} \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$$

C'est à dire :

$$v_p \leq v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par $v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$.

⇛ *On rappelle que la majoration doit être indépendante de l'indice.*

De plus, pour tout n entier et $k = 0$: $0 < v_{n+1} - v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'après le théorème de limite monotone, $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.

6. Le théorème de limite monotone donne aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq \alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons : $\frac{1}{2^n} \ln(u_n) \leq \alpha \Rightarrow \ln(u_n) \leq \alpha 2^n$.

Or exp est croissante d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n).}$

➢ Soient $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier k, nous savons que d'après la question B4) :

$$v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Par passage à la limite sur $k \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \quad &\Rightarrow \quad \alpha \leq v_n + \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n} \ln(u_n) + \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\ &\Rightarrow \quad 2^n \alpha \leq \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \ln(u_n + 1) \\ &\Rightarrow \quad \exp(2^n \alpha) \leq u_n + 1 \text{ car exp estcroissante.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1}$

➢ Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons démontré :

$$u_n \leq \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$$

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et tend vers $+\infty$ d'après la partie A, ainsi :

$$1 \leq \frac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$$

et $\dfrac{1}{u_n} \to 0$, donc d'après le théorème d'encadrement : $\dfrac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} \to 1$

Ainsi, $\boxed{\exp(\alpha 2^n) \underset{+\infty}{\sim} u_n}$

7. D'après la question B6), nous avons

$$u_n \leq \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \beta_n \leq 1$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n) &= \Big[\exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - u_{n+1} + (\exp(\alpha 2^n) - u_n)^2 \\
&\qquad - (\exp(\alpha 2^n) - u_n)\Big]\exp(-\alpha 2^n) \\
&= \Big[\exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - u_n - u_n^2 + \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - 2\exp(\alpha 2^n)\,u_n \\
&\qquad + u_n^2 - \exp(\alpha 2^n) + u_n\Big]\exp(-\alpha 2^n) \\
&= \Big[2\exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - 2\exp(\alpha 2^n)\,u_n - \exp(\alpha 2^n)\Big]\exp(-\alpha 2^n) \\
&= 2\exp(\alpha 2^n) - 2u_n - 1 = 2\beta_n - 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\beta_n - 1 = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n)}$$

8. La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $\left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)$ est également bornée. Or $\exp(-\alpha 2^n) \to 0$. Comme le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle est une suite de limite nulle, nous obtenons

$$2\beta_n - 1 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta_n - 1 = o(1) \quad \Leftrightarrow \quad \beta_n = \frac{1}{2} + o(1)$$

Par définition de la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$, nous avons :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} + o(1)$$

Exercice 3 - Produit de convolution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
Par la formule du binôme $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n!}(a+b)^n}$.

2. Montrons à l'aide d'un contre-exemple que la convergence des suites u et v n'implique pas celle de w. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = 1$. Ainsi u et v convergent.
Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$
Ainsi w diverge vers $+\infty$: w n'est pas convergente.
Ainsi, $\boxed{\text{la convergence de } u \text{ et } v \text{ n'implique pas celle de } u \star v.}$

3. a) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $n < m$. Alors $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k$ est la somme de $m-n$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Le premier terme est $\frac{1}{2^{n+1}}$ donc :
$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right)$$
Or $1 - \dfrac{1}{2^{m-n}} \leq 1$ donc $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k \leq \frac{1}{2^n} = u_n$.
Ainsi, $\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n < m,\ \sum_{k=n+1}^{m} u_k \leq u_n.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. découpons la somme :
$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n-k}$$
Or la suite v est décroissante, donc :
$$\begin{array}{llll} \forall k \in [\![0, n]\!], & v_{2n-k} \leq v_n & \Rightarrow & u_k v_{2n-k} \leq u_k v_n \\ \forall k \in [\![n+1, 2n]\!], & v_{2n-k} \leq v_0 & \Rightarrow & u_k v_{2n-k} \leq u_k u_0 \end{array}$$
La suite u étant à termes positifs, on en déduit que par sommation des inégalités :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_{2n} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_0}$$

c) Or $v_0 \geq 0$ (v est à termes positifs car décroissante de limite nulle), donc d'après 3a), on a :
$$w_{2n} \leq v_n \sum_{k=0}^{n} u_k + v_0 u_n$$
Enfin $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} = 2\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2$.
Ainsi, $\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n < m, \quad w_{2n} \leq 2v_n + v_0 u_n}$.

d) On suit une démarche analogue à celle sur les termes de rang pair.
Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$:

- Découpage de la somme :

$$w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k v_{2n+1-k}$$

- La décroissance de v donne :

$$w_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k v_0$$

- La majoration des sommes des termes de u (d'après 3a)) donne :

$$w_{2n+1} \leq 2v_{n+1} + v_0 u_n$$

Ainsi, $\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n < m, \quad w_{2n+1} \leq 2v_{n+1} + v_0 u_n}$.

e) u et v sont à termes positifs donc w aussi.
De plus $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $2v_n + v_0 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $2v_{n+1} + v_0 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par encadrement appliqué à 3c) et 3d), on obtient $w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (puisque le résultat est vérifier pour les deux sous-suites, celle des termes de rang pair et celle des termes de rang impair.)
Ainsi, $\boxed{w \text{ converge vers } 0}$.

4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \tilde{u}_k = |u_k|$ et $\tilde{w} = \tilde{u} \star v$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire donne :

$$|w_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n} \tilde{u}_k v_{n-k} = \tilde{w}_n$$

Or $\tilde{w}$ est le produit de convolution étudié à la question 3, et on a vu que $\tilde{w}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par encadrement, on en déduit que $\boxed{w \text{ converge vers } 0}$.