

Corrigé du DM 11

Formule de Stirling

Partie A - Intégrale de Wallis

$$1. \quad \boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}.$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leq \cos(t) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (\cos(t))^{n+1} \leq (\cos(t))^n$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (W_n) \text{ est décroissante.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction \cos est positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par stricte positivité de l'intégrale (l'intégrale d'une fonction positive, continue et non constante nulle est strictement positive) on a $W_n > 0$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n > 0}$

Attention ! $W_n \geq 0$ était facile à obtenir au 2a) mais $W_n > 0$ nécessite de citer plus précisément le théorème de positivité stricte de l'intégrale.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(\cos(t))^{n+1} dt$.

Effectuons une intégration par parties avec $u : t \mapsto (\cos(t))^{n+1}$ et $v : t \mapsto \sin(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 .

$$\begin{cases} u(t) = (\cos(t))^{n+1} \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = u'(t) = -(n+1)\sin(t)(\cos(t))^n \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\sin(t)(\cos(t))^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)(\sin(t))^2(\cos(t))^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t))(\cos(t))^n dt \\ &= (n+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt \right) \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$.

b) En multipliant l'égalité précédente par W_{n+1} , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n.$$

La suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0}$.

4. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après 2a), (W_n) est décroissante, alors $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2}$.

D'après 3a) $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1}W_n}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2b) $W_n > 0$. Divisant par W_n les membres de l'inégalité précédente, il vient :

$$1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+2}{n+1}$$

Or $\frac{n+2}{n+1} \sim \frac{n}{n} \sim 1 \rightarrow 1$. Par encadrement $\frac{W_{n+1}}{W_n} \rightarrow 1$.

Ainsi, $\boxed{W_{n+1} \sim W_n}$.

L'égalité du 3b) devient :

$$(n+1)W_{n+1}W_n \sim nW_n^2 \sim W_0W_1 \sim \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$

Or l'équivalence est compatible par composition avec la fonction racine carrée.

Ainsi, $\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$.

5. D'après l'égalité établie en 3a) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \text{ ou encore } W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Il vient : } W_{2n} &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \times W_0 = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1 \pi}{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \dots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \pi}{(2n \times 2(n-1) \times \dots \times 4 \times 2)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)! \pi}{(2^n n!)^2 2} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n} (n!)^2 2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n} (n!)^2 2}}$.

Autre approche : Faire une récurrence.

En particulier, d'après 4b), $\frac{(2n)! \pi}{2^{2n} (n!)^2 2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

Ainsi, la **formule de Wallis** est $\boxed{\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}}$

Partie B - Formule de Stirling

6. a) Effectuons un développement asymptotique (en $\frac{1}{n}$) de a_n afin d'en déterminer un équivalent :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -1 - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ a_n &= -1 - \left(-1 - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{1}{12n^2} \end{aligned}$$

b) Comme $12n^2 a_n \sim 1$, alors il existe $N \geq 2$ tel que pour $n \geq N$, $0 \leq 12n^2 a_n \leq 2$ c'est-à-dire $0 \leq a_n \leq \frac{1}{6n^2}$.

c) Il vient, pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^n a_k &\leq \sum_{k=N}^n \frac{1}{6k^2} \leq \sum_{k=N}^n \frac{1}{6k(k-1)} \\ &\leq \frac{1}{6} \sum_{k=N}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{n} \right) \text{ (somme télescopique)} \\ &\leq \frac{1}{6(N-1)} \\ \sum_{k=2}^n a_k &\leq \sum_{k=2}^{N-1} a_k + \frac{1}{6(N-1)} \text{ majorant ne dépendant pas de } n \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\sum_{k=2}^n a_k \right)$ est majorée.

Comme, à partir d'un certain rang, $a_n \geq 0$, alors la suite est croissante.

d) Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $\left(\sum_{k=2}^n a_k \right)$ converge.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \ln(A_n) - \ln(A_{n-1}) &= \ln\left(\frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{(n-1)!} (n-1)^{n-1} e^{-(n-1)} \sqrt{n-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n-1)!}{n!} \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \frac{e^{-n}}{e^{-(n-1)}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n} \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} e^{-1} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} e^{-1} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{-1}\right) \\ &= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = a_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \geq 2, a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

8. La somme $\sum_{k=2}^n a_k$ est donc de type télescopique :

$$\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=2}^n \ln(A_k) - \ln(A_{k-1}) = \ln(A_n) - \ln(A_1)$$

La nature de la suite $(\ln(A_n))$ est identique à celle de la suite $\left(\sum_{k=2}^n a_k \right)$: elles sont croissantes (a.p.c.r.) et convergentes, notons α sa limite.

Par composition avec exp, continue sur \mathbb{R} , la suite $(A_n)_{n \geq 2}$ converge ; sa limite est $\ell = \exp(\alpha) > 0$.

9. a) Comme $\ell \neq 0$ et que $A_n \rightarrow \ell$ alors $A_n \sim \frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n} \sim \ell$. Ainsi, $n! \sim \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

b) D'après la formule de Wallis :

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \sim \binom{2n}{n} \sim \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\frac{1}{\ell}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{(\frac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n})^2} \sim \frac{\ell 2^{2n}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

Il vient $\ell \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Ainsi, $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.