Corrigé du DM 14

Densité et structure algébrique

1. Soit $y \in f(I)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
La continuité de f en x donne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f\big(I \cap [x-\alpha, x+\alpha]\big) \subset [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$.
Or A est dense dans I donc il existe $a \in A \cap I \cap [x-\alpha, x+\alpha]$ et donc $f(a) \in [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$.
Ainsi, $\boxed{f(A) \text{ est dense dans } f(I).}$
Autre approche : Mettre en place la caractérisation séquentielle de la densité.
Soit $y \in f(I)$, alors il existe $x \in I$.
Par densité de A dans I alors il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
Par continuité de f en x, alors $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in f(A)^{\mathbb{N}}$ converge vers y.
Ainsi, par caractérisation séquentielle de la densité, $f(A)$ est dense dans $f(I)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. De plus $0 = a \times 0 \in a\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z} \neq \emptyset$.
Enfin, pour $ak, ak' \in a\mathbb{Z}$ alors $ak + (-ak') = a(k-k') \in a\mathbb{Z}$.
Ainsi, par caractérisation d'un sous groupe, $\boxed{a\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +).}$

3. Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$.

a) Soit $x \in G \cap \backslash\{0\}$ alors $-x \in G$ et donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie réelle non vide et minorée par 0 donc elle possède une borne inférieure, notée b.

b) Soit $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. A fortiori $b > 0$. Montrons que $G = b\mathbb{Z}$.

$\boxed{\supset}$ Par itération de la loi de composition interne $b\mathbb{N} \subset G$; leurs opposés sont aussi dans G donc $b\mathbb{Z} \subset G$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in G$. Posons $q = \left\lfloor \dfrac{x}{b} \right\rfloor$ alors

$$q \leq \frac{x}{b} < q+1 \quad \Rightarrow \quad qb \leq x < qb + b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x - qb < b$$

Or $x, b \in G$ et $q \in \mathbb{Z}$ donc $qb \in G$ et pour finir $x - qb \in G \cap \mathbb{R}_+$. Comme $b = \inf\big(G \cap \mathbb{R}_+^*\big)$ alors $x - qb = 0$ donc $x = qb \in b\mathbb{Z}$. Ainsi, $G \subset b\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } b \in G \cap \mathbb{R}_+^*, \text{ alors } G \subset b\mathbb{Z}.}$

c) Soit $b \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, $b + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc il existe $y_1 \in]b, b+\varepsilon[\cap G$.
De même, y_1 n'est pas non plus un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc il existe $y_2 \in]b, y_1[\cap G$. Il vient :

$$b < y_2 < y_1 < b + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_2 < y_1 < b + \varepsilon \\ -y_2 \leq -y_2 \leq -b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < y_1 - y_2 < \varepsilon$$

Comme $y_1, y_2 \in G$ alors $\alpha = y_1 - y_2 \in G$. Posons $q = \left\lfloor \dfrac{x}{\alpha} \right\rfloor$ alors

$$q \leq \frac{x}{\alpha} < q+1 \quad \Rightarrow \quad q\alpha \leq x < q\alpha + \alpha$$

Or $\alpha < \varepsilon$ et comme $q\alpha \leq x$ alors $q\alpha + \alpha < x + \varepsilon$ par somme d'inégalités. Donc

$$x < (q+1)\alpha < x + \varepsilon$$

De plus, par itération de la loi de composition interne, $(q+1)\alpha \in G \cap \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.
Considérant les opposés, alors $G \cap \mathbb{R}_-^*$ est dense dans $\mathbb{R}_-$.
Ainsi, $\boxed{\text{si } b \notin G \cap \mathbb{R}_+^*, \text{ alors } G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

Remarque – Si $b \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$ alors $b = 0$.
Formuler ce résultat n'est pas directement utile pour répondre à la question de la densité.
Néanmoins il se déduit de ce qui a été fait en prenant $\varepsilon = b$.
En effet, raisonnant par l'absurde, supposant $b > 0$, alors $y_1 - y_2 \in G \cap]0, b[$ ce qui est contradictoire.

d) Si $G = \{0\}$ alors $G = 0\mathbb{Z}$. Sinon, nous venons de voir que soit $G = b\mathbb{Z}$ soit G est dense dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, $\boxed{\text{les sous groupes de } (\mathbb{R}, +) \text{ sont soit de la forme } a\mathbb{Z} \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+, \text{ soit dense dans } \mathbb{R}.}$

4. On a $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. De plus, $1 = 1 + 2\pi \times 0 \in \mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} \neq \emptyset$.
Enfin, pour $a + 2b\pi, c + 2d\pi \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ alors $a + 2b\pi + (-c - 2d\pi) = a - c + 2\pi(b - d) \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.
Ainsi, par caractérisation d'un sous groupe, $\boxed{\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +).}$

5. Montrons par l'absurde que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Supposons la négation vraie ; d'après ce qui précède, il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$.
D'une part, $1 \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $1 = bk$ c'est-à-dire que $b = \dfrac{1}{k} \in \mathbb{Q}$.
D'autre part, $\pi \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}^*$ tel que $2\pi = bk'$ et donc $\pi = \dfrac{bk'}{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux par hypothèse.
Ainsi, $\boxed{\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

6. Procédons par double inclusion. D'une part :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos(\mathbb{N}) \subset \cos\big(\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}\big) \subset \cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big)$$

D'autre part, considérons $x \in \cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big)$ donc il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = \cos(a + 2b\pi) = \cos(a) = \cos(-a) \in \cos(\mathbb{N})$$

Donc $\cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big) \subset \cos(\mathbb{N})$.
Ainsi, $\boxed{\cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big) = \cos\big(\mathbb{N} + \pi\mathbb{Z}\big) = \cos(\mathbb{N}).}$

7. La fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$ et $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
De plus, $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $\cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1, 1]$.
Or $\cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big) = \cos\big(\mathbb{N}\big)$, donc $\boxed{\cos(\mathbb{N}) \text{ est dense dans } [-1, 1].}$

8. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrons qu'il existe une fonction strictement croissante de $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\Big(\cos\big(\varphi(n)\big)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.
Posons $\varphi(0) = 0$. Procédons par récurrence pour établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut construire $\varphi(n)$ tel que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $|\cos\big(\varphi(n)\big) - x| \leq \dfrac{2}{n}$.

- <u>Initialisation :</u> Posons $\varphi(1) = 1$ avec $1 > \varphi(0)$.

  Comme $\cos\big(\varphi(1)\big), x \in [-1, 1]$ alors $\cos\big(\varphi(1)\big) - x \in [-2, 2]$ et donc $|\cos\big(\varphi(1)\big) - x| \leq \dfrac{2}{1}$.

- <u>Hérédité :</u> Soit $n \geq 1$. On suppose $\big(\varphi(n)$ construit.

  Considérons $K = \left([-1, 1] \cap \left[x - \dfrac{2}{n+1}, x + \dfrac{2}{n+1}\right]\right) \setminus \{\cos(j) ; j \in [\![0, \varphi(n)]\!]\}$.
  L'ensemble K est une réunion finie d'intervalles. Alors il existe $a, b \in [-1, 1]$ tel que $[a, b] \subset K$.
  La densité de $\cos(\mathbb{N})$ dans $[-1, 1]$ donne qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\cos(N) \in [a, b] \subset K$.
  Par construction de K on a les propriétés suivantes :

  - $N > \varphi(n)$, on peut pose $\varphi(n+1) = N$
  - $\cos(N) \in K \subset \left[x - \dfrac{2}{n+1}, x + \dfrac{2}{n+1}\right]$ donc $|\cos(N) - x| \leq \dfrac{2}{n+1}$
- Conclusion : il existe une fonction $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$|\cos\big(\varphi(n)\big) - x| \leq \frac{2}{n}$$

Or $\dfrac{2}{n} \to 0$ donc $\cos\big(\varphi(n)\big) \to x$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe une suite extraite de } \Big(\cos(n)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } x.}$