P_{13} : • $f \underset{x_0}{\sim} g$, $f = \varphi_1 g$, φ_1 dif au vois de x_0 , $\varphi_1 \underset{x_0}{\to} 1$

$h \underset{x_0}{\sim} i$, $h = \varphi_2 i$ φ_2

$\Rightarrow fh = \varphi_1 \varphi_2 gi = fh = \varphi gi$, φ

(mais pas pour + et ∘)

$\ln 2x \underset{0^+}{\sim} \ln x$ $\quad \frac{\ln 2x}{\ln x} = \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} = \frac{\ln 2}{\ln x} + 1 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 + 1 = 1$

Ex: Equivalent en $+\infty$ de $\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x)$

$x \mapsto \arctan x$ $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

TAF ($a = x$, $b = x+1$)

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\Rightarrow \exists c \in]x, x+1[$, $\arctan(x+1) - \arctan x = \frac{1}{1+c^2}(x+1-x)$

$0 < x < c < x+1$

$x^2 < c^2 < (x+1)^2$

$\frac{1}{1+(x+1)^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow \frac{1}{1+(x+1)^2} < \arctan(x+1) - \arctan x < \frac{1}{1+x^2}$

$\div \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\frac{1}{1+(x+1)^2}}{\frac{1}{1+x^2}} < \dfrac{\downarrow}{\frac{1}{1+x^2}} < 1$

$\underset{x \to +\infty}{\to} 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\arctan(x+1) - \arctan x}{\frac{1}{1+x^2}} = 1$

~~$\Rightarrow \arctan(x+1) - \arctan x \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$~~

Lundi 25

Equivalents classiques:

• Si $\alpha \neq 0$, $f(x) = (1+x)^\alpha - 1$, f der sur $]-1, +\infty[\Rightarrow$ en 0 ✓

$\forall x > -1$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \alpha = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\alpha x} = 1 \Rightarrow (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

• $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$; $\lim_{x \to 0} 2 \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1$

• $1 - \mathrm{ch}\, x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$; $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \mathrm{ch}\, x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ car $1 - \mathrm{ch}\, x = -2\mathrm{sh}^2 \frac{x}{2}$

P_{14} : 1- $g = \underset{x_0}{o}(f) \Rightarrow f + g \underset{x_0}{\sim} f$

p10 $f \sim g$ ssi $f - g = o(g)$

Dire que $f + g \sim f$ revient à dire que $g = o(f)$

Donc, $g = o(f) \overset{(\Leftrightarrow)}{\Rightarrow} f + g \sim f$

en particulier

. $\ln x + x \underset{0}{\sim} \ln x$ car $x = \underset{0}{o}(\ln x)$, en effet $\frac{x}{\ln x} \underset{0}{\to} 0$

. $e^x + x \underset{+\infty}{\sim} e^x$ car $x = \underset{+\infty}{o}(e^x)$

2- $f_1 \sim \varphi_1$
$f_2 \sim \varphi_2$
φ_1 et $\varphi_2 > 0$
$\Bigg\}$ $f_1 + f_2 \sim \varphi_1 + \varphi_2$

$f_1 \underset{x_0}{\sim} \varphi_1$ ssi $f_1 - \varphi_1 = \underset{x_0}{o}(\varphi_1)$

$f_2 \underset{x_0}{\sim} \varphi_2$ ssi $f_2 - \varphi_2 = \underset{x_0}{o}(\varphi_2)$

mq $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} \varphi_1 + \varphi_2$ cad $f_1 - \varphi_1 + f_2 - \varphi_2 = \underset{x_0}{o}(\varphi_1 + \varphi_2)$

On utilise pour ça p8-3 : Si $f = o(g)$ et $g = O(h) \Rightarrow f = o(h)$

ici $f_1 - \varphi_1 \underset{x_0}{=} o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = O(\varphi_1 + \varphi_2) \Rightarrow \left[f_1 - \varphi_1 = o(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$

en effet $0 < \varphi_1 < \overbrace{\varphi_1 + \varphi_2}^{>0} \Rightarrow 0 < \frac{\varphi_1}{\varphi_1+\varphi_2} < 1$

donc $\frac{\varphi_1}{\varphi_1+\varphi_2}$ bornée au vois en x_0 $\Rightarrow \varphi_1 \underset{x_0}{=} O(\varphi_1 + \varphi_2)$

De m̂ $f_2 - \varphi_2 \underset{x_0}{=} o(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow f_1 - \varphi_1 + f_2 - \varphi_2 = o(\varphi_1 + \varphi_2)$

P15: 1- $e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$ ssi $\lim_{x_0} (f-g) = 0$

$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$ ssi $\underset{e^g \neq 0}{\frac{e^f}{e^g}} \underset{x_0}{\rightarrow} 1$ ssi $e^{f-g} \underset{x_0}{\rightarrow} 1$ ssi $f-g \underset{x_0}{\rightarrow} 0$

2- Si $f, g > 0$ et $\lim_{x_0} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell \neq 1$

$\left(f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g\right)$

$f \underset{x_0}{\sim} g$ ssi $f - g \underset{x_0}{=} o(g)$ ssi $f = g + \underset{x_0}{o}(g)$ $\quad o(g) = o(1)\cdot g$ (□)

donc $\ln(f) = \ln(g + \underset{x_0}{o}(g)) = \ln(g(1 + \underset{x_0}{o}(1))) = \ln g + \ln(1 + \underset{x_0}{o}(1))$

$\ln f = \ln g + \underset{x_0}{o}(\ln g) \underset{x_0}{\sim} \ln g$ (▽)

(▽) En effet, $1 + \underset{x_0}{o}(1) \sim 1 \Rightarrow \lim_{x_0}(1 + o(1)) = 1 \Rightarrow \lim_{x_0} \ln(1 + o(1)) = 0$

De plus $g \underset{x_0}{\sim} f$ et $\lim_{x_0} f = \ell \Rightarrow \lim_{x_0} g = \ell \neq 1 \Rightarrow \lim_{x_0} \ln g = \ln \ell \neq 0$

$\Rightarrow \ln(1 + o(1)) = o(\ln g)$

(□) Mq si $f = \underset{x_0}{o}(g) \Rightarrow f = g \cdot \underset{x_0}{o}(1)$

$f \underset{x_0}{=} o(g) \Rightarrow \exists \varphi$ déf au vois de x_0, $f = \varphi g$, $\lim_{x_0} \varphi = 0$

- $f = \varphi g$, $\varphi \underset{x_0}{=} o(1)$

$\left(\Rightarrow \underset{x_0}{o}(g) = \underset{x_0}{o}(1)\cdot g\right)$

3) Si $f, g > 0$ et $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$

$f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow f = \varphi g$, $\lim_{x_0} \varphi = 1$

$\Rightarrow f^\alpha = \varphi^\alpha g^\alpha$, $\lim_{x_0} \varphi^\alpha = 1$

car $f^\alpha = e^{\alpha \ln f}$

P16: $f \underset{x_0}{\sim} g$; φ déf au vois de a, $\lim_{t \to a} \varphi = x_0 \Rightarrow f(\varphi(t)) \underset{t \to a}{\sim} g(\varphi(t))$

- $\ln\left(1 + \frac{1}{u}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u}$ car $\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$ et $\frac{1}{u} \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$ car $\frac{1}{\ln x} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$ et $\mathrm{sh}(X) \underset{0}{\sim} X$
- $\arcsin(e^x) \underset{-\infty}{\sim} e^x$ car $e^x \underset{-\infty}{\rightarrow} 0$ et $\arcsin X \underset{0}{\sim} X$
- $\tan(\cos x - 1) \underset{0}{\sim} \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

car $\cos x - 1 \underset{0}{\rightarrow} 0$ et $\tan X \underset{0}{\sim} X$

P_{17} : $\forall x \in V_{x_0}$, $f \leq g \leq h$; $f \underset{x_0}{\sim} i$ et $h \underset{x_0}{\sim} i$ $\Big\}$ $g \underset{x_0}{\sim} i$

$f \leq g \leq h$

$0 \leq g - f \leq h - f$

- si $h - f = 0$ alors $0 \leq g - f \leq 0 \Rightarrow g = f$ or $f \underset{x_0}{\sim} i \Rightarrow g \underset{x_0}{\sim} i$
- si $h - f \neq 0 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{g-f}{h-f} \leq 1$

$\Rightarrow g - f = \underset{x_0}{O}(h-f)$

et par ailleurs $f \underset{x_0}{\sim} i$ et $i \underset{x_0}{\sim} h \Rightarrow f \underset{x_0}{\sim} h$ $(= h \underset{x_0}{\sim} f)$

$\Rightarrow h - f = \underset{x_0}{o}(f)$

$\Rightarrow$ comme $g - f = O_{x_0}(h-f)$ et $(h-f) = o_{x_0}(f)$

p.8 $\Rightarrow g - f = o_{x_0}(f) \underset{\text{p.10}}{\Rightarrow} g \underset{x_0}{\sim} f$ or $f \underset{x_0}{\sim} i \Rightarrow g \underset{x_0}{\sim} i$

P_{18} : Si $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} g$ au vois de x_0

$f = \varphi g$, $\lim\limits_{x_0} \varphi = 1$

Sq f est positive au vois de x_0. Comme $\varphi \underset{x_0}{\to} 1 > 0$ et $f = \varphi g$

$\Rightarrow g = \dfrac{f}{\varphi} > 0$

Ex : Déterminer le signe de $f : x \mapsto x^3 - 2x^2$ au vois de 0.

$f(x) \underset{0}{\sim} -2x^2$, or au vois de 0 , $-2x^2 < 0 \Rightarrow f < 0$ au vois de 0.

6- Cas des suites :

- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{+\infty} u_n = x_0 \Rightarrow f(u_n) \underset{+\infty}{\sim} g(u_n)$

Ex : $u_n = \ln(\cos(\frac{1}{n})) = \ln(\underbrace{\cos(\tfrac{1}{n}) - 1}_{X \underset{+\infty}{\to} 0} + 1) \underset{+\infty}{\sim} \cos(\frac{1}{n}) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$

- $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et $\lim\limits_{+\infty} u_n = x_0 \Rightarrow f(u_n) = \underset{+\infty}{o}(g(u_n))$

P_{30} :

$(\ln n)^\gamma \quad n^\alpha \quad n^\beta \quad \underbrace{a^n \quad n!}$ $\quad n^n$

$\alpha < \beta$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^+)^3$

$\hookrightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \Rightarrow a^n = \underset{+\infty}{o}(n!)$

$DL_n(0)$ de f : $f(x) = P(x) + x^n \mathcal{E}(x) = P(x) + o(x^n)$

P_{31} : Unicité de $DL_n(0)$:

Soit f une fct qui admet 2 $DL_n(0)$ en 0 :

Soit $x \neq 0$, $x \in I$ où I = vois de 0

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \mathcal{E}_1(x)$

$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + x^n \mathcal{E}_2(x)$

Si $(a_0, \dots, a_n) \neq (b_0, \dots, b_n)$

Soit $p = \min\{k \in [\![0, n]\!] , a_k \neq b_k\}$ + petit indice pour lequel les coeff $\neq$

$\Rightarrow a_p \neq b_p$

$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = b_0 + b_1 x + \dots b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$

$\Rightarrow a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = x^n(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))$

$(a_p - b_p)x^p + (a_{p+1} - b_{p+1})x^{p+1} + \dots + (a_n - b_n)x^n = x^n(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))$

$\div x^p$

$a_p - b_p + (a_{p+1} - b_{p+1})x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-p} = x^{n-p}(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))$

passant à la limite en 0

$a_p - b_p = 0$ car $\lim\limits_0 \varepsilon_1 = \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0$

Contradict avec $a_p \neq b_p$

Ccl : $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$

P_{32} : Si $p \leq n$ et f admet un $DL_n(0)$, soit $x \in I \to$ vois de 0.

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

$= \underline{\qquad\qquad} + a_p x^p + x_p(a_{p+1} x + a_{p+2} x^2 + \dots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x))$

$= \underline{\qquad\qquad} + x_p \tilde{\varepsilon}(x)$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$

$\Rightarrow f$ admet un $DL_p(0)$

Exemple :

- $f(x) = x^5 + 4x - 1$

f a un $DL_5(0)$ qui est $-1 + 4x + x^5 + x^5 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon : x \mapsto 0$ dif au vois de 0. $\Rightarrow \lim\limits_0 \varepsilon = 0$

$DL_3(0)$ —— $-1 + 4x + x^3 \varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon : x \mapsto x^2$

on a bien $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1 = 0$

- $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$, si $x \neq 1$

donc si $x \neq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = (1 - x^{n+1}) \cdot \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$

On mq $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$

$\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \cdot \dfrac{x}{1-x} = x^n \cdot \varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1+x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Ccl : $f(x) = 1 + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1+x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$\Rightarrow f$ admet un $DL_n(0)$

- $f(x) = \underbrace{2 + 3x - 7x^2}_{} + \underbrace{x^3 e^{-\frac{1}{x}}}_{mq\ =\ o_0(x^2)}$

Le $DL_2(0)$ de f est $2 + 3x - 7x^2 + o(x^2)$ car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0$

Le $DL_1(0)$ s'obtient par troncature

$f(x) = 2 + 3x + o(x)$

Le $DL_0(0)$, $f(x) = 2 + o(1)$

P_{33} : Soit f une fct qui admet un $DL_n(0)$

Soit $x \in I$, où I = vois de 0

$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$, $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$, avec $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Sq $-x \in I \in \mathcal{D}_f$

$$f(-x) = P(-x) + (-x)^n \varepsilon(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k + (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{où } \varepsilon_1(x) = (-1)^n \varepsilon(-x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

On a le $DL_n(0)$ de $f(-x)$

- si f est paire alors $f(x) = f(-x)$ et par unicité du $DL_n(0)$, on a que

  $P(x) = P(-x)$ $\Rightarrow$ càd $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = (-1)^k a_k$

  et si k impair $\Rightarrow a_k = -a_k \Rightarrow a_k = 0$

  $\Rightarrow$ Tous les termes de rang impair dans P sont nuls.

- si f impair $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ cad $-\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k$

  $\Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!]$, $-a_k = (-1)^k a_k$

  et si k pair $\Rightarrow$ $a_k = 0$

  $\Rightarrow$ Tous les termes de rang pair dans P sont nuls.

P_{34} : Si f a un $DL_n(0)$

$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}_{P(x)} + o_0(x^n)$

et si $P(x) \neq 0$ $\Rightarrow \exists i \in [\![0,n]\!]$, $a_i \neq 0$

Soit $p = \min\{i \in [\![0,n]\!],\ a_i \neq 0\}$

alors $p \leq n$ et $f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n + \underset{0}{o}(x_n)$

$x^p\left(\underbrace{x a_{p+1} + x^2 a_{p+2} + \dots x^n a_n}\right)$; $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ $\Rightarrow x^p \varepsilon(x) = \underset{0}{o}(x^p)$

Alors le $DL_p(0)$ de f est $f(x) = a_p x^p + \underset{0}{o}(x_p)$ (P32)

$\Rightarrow f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$

(Un DL donne un éq) et par P18 : $f(x)$ et $a_p x^p$ ont m̂ signe au vois de 0.

Ex : $f(x) = x^3 - 4x^2 + \underset{0}{o}(x^4)$, signe de f en 0 ?

$f(x) \underset{0}{\sim} x^3$ au vois de 0.

si $x < 0 \Rightarrow x^3 \overset{<0}{\Rightarrow} f(x) < 0$

si $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

P_{35} : f admet une limite finie en 0 ssi f admet un $DL_0(0)$

Soit $x \in I \cap \mathcal{D}_f$, I vois de 0

$(\Rightarrow)$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell \Rightarrow f(x) = \ell + \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$= \ell + x^0(\varepsilon(x)) = \ell + o(1)$

Donc f admet un $DL_0(0)$

$(\Leftarrow)$ f admet un $DL_0(0)$ $\Rightarrow f(x) = a_0 + x^0 \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \underset{0}{\longrightarrow} 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a_0$ $\Rightarrow f$ admet limite finie en 0

P_{36} : Soit f une fct dēf en 0.

• $(\Rightarrow)$ Sq f a un $DL_1(0)$, mq f der

Soit $x \in I \cap \mathcal{D}_f$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \underbrace{o(x)}_{= x\varepsilon(x),\ \varepsilon \to_0 0}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$

Comme f est définie en 0 et admet comme limite en 0, $a_0 \Rightarrow a_0 = f(0)$

Soit $x \in I \cap \mathcal{D}_f$

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cancel{a_0} + a_1 x + x\varepsilon(x) - \cancel{a_0}}{x} = a_1 + \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} a_1$

donc f der en 0 et $f'(0) = a_1$

• $(\Leftarrow)$ Sq f dēr en 0

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

Donc si $x \in \mathcal{D}_f \cap I$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + \varepsilon(x)$, $\lim_0 \varepsilon = 0$

$\Rightarrow f(x) = x f'(0) + f(0) + x\varepsilon(x)$

$\Rightarrow f$ admet un $DL_1(0)$

Ex: $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}$ $\not\!\!f$ dēf en 0 mais elle admet un $DL_1(0)$

$1 + \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}$ ssi $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + \underbrace{o\left(\frac{x^2}{2}\right)}_{\frac{x^2}{2}\varepsilon(x)}$ (p.10)

donc $\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{x}{2} + o\left(\frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} + o\left(\frac{x}{2}\right)$ $(DL_1(0))$

$\Rightarrow f(x) = 0 + o(1)$ $(DL_0(0))$

$\Rightarrow f$ admet la limite 0 en 0, donc f est prolongeable par cont en 0

en posant $f(0) = 0$, et $\tilde{f}$ le prolongement est der en 0 et $\tilde{f}'(0) = \frac{1}{2}$

T_1 :

↳ en 0 : formule de TY sur exp

exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, exp est C^n sur $\mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x)$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

• $DL_{(2n)}$ de cos en 0 :

$\cos^{(0)}(0) = \cos 0 = 1$

$\cos x = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2n})$

$\cos^{(1)}(0) = -\sin 0 = 0$

$\cos^{(2)}(0) = -\cos 0 = -1$

$\cos x = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n}) = \dots = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2n})$

↳ $k = 2j$

$\cos^{(3)}(0) = 0$

$\cos^{(4)}(0) = 1$

• sin :

$\vdots \; \sin^{0} = 0$

$\sin^{(1)}(0) = 1$

$\sin^{(2)}(0) = 0$

$\sin^{(3)}(0) = -1$

$\sin^{(4)}(0) = 0$

$DL_{2n+1}(0)$ sin :

th.1 : $\sin x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+1})$

k impair $\rightarrow k = 2j+1$

$$\sin x = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} x^{2j+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + o(x^{2n+1})$$

$\rightarrow DL_{2n+2}(0)$ de sin : $\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + 0 \times x^{2j+2} + o(x^{2j+2})$

• DL de $(1+x)^{\alpha}$

Soit $f : x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$\vdots \; f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$ en 0 $= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)$

f est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-1,+\infty[$ → comp de fct $\mathcal{C}^{\infty}$

$\forall x \in]-1, +\infty[$, $DL_n(0)$, $f(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{\alpha}{1!}x^1 + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

faire avec $\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{x^3}{3!} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

T_1 : démo

Soit f une fct déf sur I,

Soit $I = D_f \cap V_0$ est un intervalle

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ alors $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \underset{0}{o}(x^n)$

• init : je suppose que $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$

f est continu sur I donc f est continue en 0.

Donc f admet une limite finie en 0 qui vaut f(0).

P.35 → f admet un $DL_0(0)$ qui est :

$\forall x \in I$, $f(x) = f(0) + \underset{0}{o}(1) = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^0)$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie.

• hérédité :

Sq $\exists n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I

$\Rightarrow f' \in \mathcal{C}^n$ sur I

Soit $x \in I$, par h.r, $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$

alors $\exists c \in \mathbb{K}$

$\int$: $f(x) = c + \sum_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(0)}{k!} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$ (*)

on évalue en 0 :

$\Rightarrow f(0) = c + 0 + 0$

$\Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} + o(x^{k+1})$

$j = k+1$

$\Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + o(x^j) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + o(x^j)$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ ✓

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

Revenons à (*), comprendre pk si $g = o(x^n)$ et g cont (diff de fct cont) alors une primitive de g est un $o(x_{n+1})$

$\exists \varphi$ déf au V_0, $g(x) = \varphi(x) x^n$ $\forall x \in V_0$ et $\lim_0 \varphi = 0$ sur I

Soit G la $\int$ de g qui s'annule en 0 : $\left(G(x) = \int_0^x g(t)\,dt\right)$

Soit $x \in I$ 1 fois $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \varphi(t) t^n\,dt$

chgmt de var $\int$. $t \mapsto \frac{t}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

$s \mapsto \frac{t}{x}$. $G(x) = \int_0^1 \varphi(xs) x^n s^n x\,ds = x^{n+1} \underbrace{\int_0^1 \varphi(xs) s^n\,ds}_{\mathcal{E}(x)}$

$t = xs$

$dt = x\,ds$

Mq $\lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$

à voir ; s varie entre 0 et 1 ; ≤ 1

$|\mathcal{E}(x)| = \left| \int_0^1 \varphi(xs) s^n\,ds \right| \leq \int_0^1 |\varphi(xs) s^n|\,ds = \int_0^1 |\varphi(xs)|\,|s^n|\,ds \leq \int_0^1 |\varphi(xs)|\,ds$

Or $\lim_0 \varphi = 0$

Soit $\varepsilon_1 > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]-\eta, \eta[$, $|\varphi(x)| < \varepsilon_1$

① $0 \leq s \leq 1$, $-\eta < x < \eta$ $\Rightarrow -\eta s \leq -\eta s < xs < \eta s \leq \eta$

Soit $s \in [0,1]$, $sx \overset{①}{<} \eta \Rightarrow sx \in]-\eta, \eta[\Rightarrow |\varphi(sx)| < \varepsilon_1$

$|\mathcal{E}(x)| \leq \int_0^1 \varepsilon_1\,ds = \varepsilon_1 [s]_0^1 = \varepsilon_1$, on vient de mq $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]-\eta, \eta[, |\mathcal{E}(x)| \leq \varepsilon_1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$

En appliquant le résultat de TY à $h : x \mapsto f(x_0 + h)$, on obtient le résultat général.

P.38 :

f a pour $DL_n(0)$

$f(x) = P(x) + o(x^n)$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$

$g(x) = f(ax^p) = \underbrace{P(ax^p)}_{P \circ Q} + o((ax^p)^n) = P \circ Q(x) + o(a^n x^{pn})$

$= P \circ Q(x) + o(x^{np})$

$\deg P \circ Q = \deg P \cdot \deg Q$

$\Rightarrow P \circ Q \in \mathbb{K}_{np}[X]$

$\Rightarrow DL_{np}(0)$ de g.

$f(x)\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1+x^2} = g(x) = f(x^2) = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^2)^3 + \dots + (-1)^n (x^2)^n + o(x^{2n})$

$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$

$\Rightarrow \arctan x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

$\arctan(0) = 0$

faire DL associé

$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = h(x) = f(-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \overbrace{(-1)^n(-x)^n}^{(-1)^n(-1)^n x^n = x^n} + \overbrace{o((-x)^n)}^{o((-1)^n x^n) = o(x^n)}$

P 39:

f admet un $DL_n(0)$ idem pour g. $\alpha \in \mathbb{R}$ mq αf, $f+g$, fg $\rightarrow DL_n(0)$

Soit $n \in I$, $f(x) = P(x) + o_0(x^n)$ avec $P \in \mathbb{K}_n[X]$

$g(x) = Q(x) + o_0(x^n)$ Q

• $(f+g)(x) = P(x) + o_0(x^n) + Q(x) + o_0(x^n) = (\underset{\leq n}{P} + \underset{\leq n}{Q})(x) + o_0(x^n)$

$\left(o_0(x^n) + o_0(x^n) = o_0(x^n) \quad f = o(h),\ g = o(h) \Rightarrow f+g = o(h) \right)$ or $\deg(P+Q) \leq \max \dots \leq n$

Donc $(P+Q) \in \mathbb{K}_n[X]$ et $f+g$ admet un $DL_n(0)$

• $\alpha f(x) = \alpha(P(x) + o(x^n)) = (\alpha P)(x) + \alpha\, o_0(x^n) = (\alpha P)(x) + o_0(x^n)$

• $(fg)(x) = f(x).g(x) = (P(x) + x^n \varepsilon_1(x))(Q(x) + x^n \varepsilon_2(x))$ avec $\lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0$

$= (PQ)(x) + P(x) x^n \varepsilon_2(x) + x^n \varepsilon_1(x) Q(x) + x^{2n} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$

$(= R(x) + x^n \varepsilon(x))$ $= PQ(x) = x^n \underbrace{(\overset{\rightarrow 0}{P\varepsilon_2(x)} + \overset{\rightarrow 0}{\varepsilon_1 Q(x)} + \overset{\rightarrow 0}{x^n \varepsilon_1\varepsilon_2(x)})}_{\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0}$

On définit R comme la troncature à l'ordre n de PQ

par déf $R \in \mathbb{K}_n[X]$

donc fg admet un $DL_n(0)$ qui est $fg(x) = R(x) + o_0(x^n)$

Exemple:

$DL_3(0)$ de $f(x) = e^x \cos x$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + 0 + o(x^3)$

$f(x) = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]$

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x^4}{4}} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ car négligeable (troncage)

$\Rightarrow f(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Comme f admet un $DL_1(0)$ qui est $f(x) = 1 + \underset{f'(0)}{1}x + o(x)$

$\Rightarrow$ f der en 0 et $f'(0) = 1$ (P.36)

donc $\mathcal{C}_f$ admet en 0 une tangente T d'éq $y = 1 + x$

$\Rightarrow$ position relative de T et $\mathcal{C}_f$

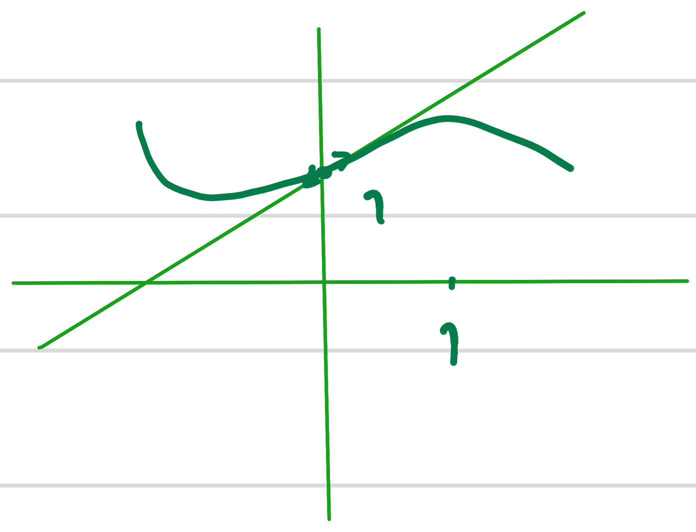
↳ avec $DL_3(0)$ de f: $f(x) - (1+x) = -\frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$

$\Rightarrow f(x) - (1+x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$

→ à d en 0, $-\frac{x^3}{3} < 0 \Rightarrow f(x) - (1+x) < 0 \Rightarrow$ T au dessus de $\mathcal{C}_f$

→ à g en 0, — $> 0 \Rightarrow$ —— $> 0 \Rightarrow$ T en dessous —

d'où l'allure de $\mathcal{C}_f$ au vois de 0 :



• $h(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x+2} = \dfrac{1/3}{x-1} + \dfrac{-1/3}{x+2}$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x+2} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\frac{x}{2}+1}$

▸ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$

▸ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+\frac{x}{2}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$

Donc $h(x) = -\dfrac{1}{3}\left[1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right] - \dfrac{1}{6}\left[1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)\right]$

$= \ldots$

Ex : $DL_2(0)$ de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$

$\sqrt{1+x} = \ldots$

$DL_3(0)$

$\sin x = \ldots$

$f(x) =$ quotient des $DL_3(0)$ / factorise par x $\rightarrow$ $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x^3}{8}$