Chapitre 21 : Espaces vectoriels

Introduction

Un espace vectoriel est une structure qui réalise un lien fondamental entre algèbre et géométrie. Un espace vectoriel est un ensemble muni d'une loi interne et d'une loi externe vérifiant des conditions précises. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}[X]$ sont des exemples d'espace vectoriel déjà rencontrés.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définition et exemples

Définition 1.

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$. Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne notée $+$ et d'une application (dite loi externe) notée . et définie ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$$

On dit que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si :

- *$(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire si on a :*
  1. *$+$ est une loi de composition interne dans E,*
  2. *$+$ est associative,*
  3. *E possède un élément neutre 0_E pour $+$,*
  4. *tout élément de E est symétrisable,*
  5. *$+$ est commutative.*
- *$\forall (x, y) \in E^2$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ on a :*
  1. *$\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$*
  2. *$1.x = x$*
  3. *$(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$*
  4. *$\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$*

Les éléments de E sont appelés vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.
L'élément neutre de E pour l'addition est 0_E (vecteur nul de E).

Remarque 1 (Notations)**.**
- *On peut écrire αx au lieu de $\alpha.x$ et si $\alpha \neq 0$ on peut écrire $\dfrac{x}{\alpha}$ au lieu de $\dfrac{1}{\alpha}x$.*
- *Ordre d'écriture à respecter : le scalaire s'écrit toujours avant le vecteur.*

► Exemples :
- $(\mathbb{C}, +, .)$ et $(\mathbb{R}, +, .)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. $(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des vecteurs du plan et l'ensemble des vecteurs de l'espace sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, ensemble des applications d'un ensemble non vide X dans $\mathbb{R}$, qui se note aussi $\mathbb{R}^X$ est un $\mathbb{R}$-espace

vectoriel pour les lois suivantes :

$$\begin{array}{rcll} f+g & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & f(t)+g(t) \\ \text{et } \alpha.f & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \alpha f(t). \end{array}$$

En particulier l'ensemble des suites réelles, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- De même, $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En particulier l'ensemble des suites complexes est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
- De manière plus générale, $\mathcal{F}(X,F)$, ensemble des applications d'un ensemble non vide X dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, noté aussi $\mathbb{K}^X$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Propriétés

Propriété 1.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :

1. $0_{\mathbb{K}}\, x = 0_E$ *et* $\alpha\, 0_E = 0_E$,
2. $-(\alpha x) = \alpha(-x) = (-\alpha)x$,
3. $\alpha\, x = 0_E \Longrightarrow (\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E)$,
4. *distributivité de la loi . par rapport aux soustractions :* $\forall (x,y) \in E^2$ *et* $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ *on a :* $(\alpha-\beta).x = \alpha.x - \beta.x$ *et* $\alpha.(x-y) = \alpha.x - \alpha.y$.

1.3 Combinaison linéaire

Définition 2.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ tout vecteur de la forme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

► Exemple : dans $\mathbb{C}$, tout complexe est combinaison linéaire à coefficients réels de 1 et i.
► Exemple : dans $\mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré au plus n est une combinaison linéaire de la famille $(1, X, \cdots, X^n)$.

Définition 3 (Famille presque nulle ou à support fini).

Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaire indexée par un ensemble I. On appelle support de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\{j \in I,\ \lambda_j \neq 0\}$. La famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est dite presque nulle ou à support fini lorsque son support est fini. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de $\mathbb{K}^I$.

► Exemple : La suite des coefficients d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ appartient à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Une famille indexée par $\mathbb{N}$ est presque nulle ssi elle est nulle à partir d'un certain rang. Une famille indexée par un ensemble fini est à support fini !

Définition 4.

Si $A = (a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E, on dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille A s'il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$. Si J désigne le support de $(\lambda_i)_{i\in I}$ ou tooute partie finie de I contenant ce support, alors $x = \displaystyle\sum_{j\in J} \lambda_j a_j$.

► Exemple : Un polynôme est une combinaison linéaire de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.4 Produit d'espaces vectoriels

Propriété 2 (Définition d'un espace vectoriel produit).

Etant donnés deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, l'ensemble $E \times F$ muni des lois produit :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé espace vectoriel produit.

► Exemples :
- — $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- De manière plus générale, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois suivantes :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des $\mathbb{R}$-espaces-vectoriels. $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2 Sous-espaces vectoriels

Dans toute cette section $(E, +, .)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Définition et exemples

Définition 5.

Soit F une partie de E,

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} F \text{ est non vide} \\ F \text{ est stable par } + \text{ et } . \end{cases}$$

Tout sous-espace vectoriel F contient 0_E (élément neutre de E pour l'addition). Pour montrer que F est non vide on vérifiera que $0_E \in F$. Dans cette définition on peut remplacer l'hypothèse F est non vide par $0_E \in F$.

Propriété 3 (Stabilité par combinaison linéaire).

Soit F une partie de E.

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff 0_E \in F \text{ et } \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \alpha x + \beta y \in F.$$

Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide et stable par combinaison linéaire.

► Méthode : pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel on utilise cette propriété pour affirmer c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu. Cela est souvent beaucoup plus rapide que de revenir à la définition 1.

► Exemples :
- — Sous-espaces vectoriels triviaux.
- — Etant donnés trois réels a, b et c, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
- — $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.
- — $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors que

  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ n'en est pas un.
- — $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.
— L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1 sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{I},\mathbb{R})$.

Propriété 4.

Soit F un sev de E. Par définition, les lois de E induisent sur F une loi de composition interne et une loi externe. Muni de ces lois induites, le sev F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 5.

Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

▶ Exemple : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Remarque 2. — *Généralisation : si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou non) de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*
— *Attention une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel .*

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie. Cas d'une partie finie

Propriété 6.

Soit A une partie de E. Il existe un plus petit sous-espace vectoriel contenant A (au sens de l'inclusion). On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par A et on le note $\mathrm{Vect}(A)$.

▶ Exemples :
— $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$
— Si $\mathrm{Vect}(A) = E$, on dit que A est une partie génératrice de E.

Propriété 7 (Cas d'une partie finie).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ une partie finie à n éléments de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n | (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Vrai aussi si $A = (a_i)_{i\in I}$.
▶ Exemples :
— Si $u \in E - \{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(\{u\})$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$: $\mathrm{Vect}(\{u\}) = \{\alpha.u \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$.
— Dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, le sous-espace vectoriel engendré par $\{1\}$ est $\mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel engendré par $\{i\}$ est l'ensemble des imaginaires purs et le sous-espace vectoriel endgendré par $\{1, i\}$ est $\mathbb{C}$.
— $\mathbb{K}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ engendré par $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$,
— $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\})$.

Définition 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. S'il existe une partie finie P de E telle que $E = \mathrm{Vect}(P)$ alors on dit que E est un espace vectoriel de dimension finie.

Ex $F = \{(x - 3y, 2x, 4y - x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$.

2.4 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 7.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et de G l'ensemble :

$$F + G = \{u \in E \mid \exists (u_1, u_2) \in F \times G \ : \ u = u_1 + u_2\}$$

Remarque 3. $F + G = G + F$.

Propriété 8.

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 9.

$F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

En général $E \cup F$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Remarque 4. *$F + G$ est donc le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.*

▶ Exemples :
- $\mathbb{K}^2 = \mathrm{Vect}(\{(1, 0)\}) + \mathrm{Vect}(\{(1, 1)\})$.
- La somme des sous-espaces vectoriels $E_1, E_2, \ldots, E_n$ de E est définie par :

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i\}$$

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient chaque E_i.

2.5 Somme directe

Définition 8.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que E_1 et E_2 sont en somme directe lorsque tout vecteur de $E_1 + E_2$ se décompose de manière unique en la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2, c'est-à-dire si $\forall x \in E_1 + E_2, \ \exists ! \ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid x = x_1 + x_2$. On note alors cette somme $E_1 \oplus E_2$.

Propriété 10 (Caractérisation par l'intersection).

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

▶ Exemple : : Soit $E_1 = \mathrm{Vect}((1, 0, 0)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}((0, 1, 1)$. E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$ qui sont en somme directe.
▶ Exemple : : Soit $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$. E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$ qui sont en somme directe.

2.6 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Propriété 11.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in E, \ \exists ! \ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid x = x_1 + x_2$,
2. $E = E_1 + E_2$ *et* $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Dans la deuxième proposition, $E = E_1 + E_2$ se traduit par le fait que tous les vecteurs de E peuvent s'exprimer comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ; $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ signifie que le seul vecteur commun à F et à G est le vecteur nul de E.

Définition 9.

Lorsque ces propositions sont vérifiées, on dit que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. E_1 et E_2 sont alors en somme directe et on note $E = E_1 \oplus E_2$.

► Méthode : pour montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, il suffit de montrer que $x \in F \cap G \Longrightarrow x = 0_E$ (l'inclusion réciproque est évidente puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E d'après la propriété 5).

► Exemples :

— Un sous-espace vectoriel peut admettre plusieurs supplémentaires dans E. Par exemple les deux sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(\{(1,0)\})$ et $\text{Vect}(\{(0,1)\})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^2$; $\text{Vect}(\{(1,0)\})$ et $\text{Vect}(\{(1,1)\})$ le sont aussi.

— Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Cas des parties paire et impaire de la fonction exponentielle.

— Dans le cas où E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on peut définir deux applications : p_1, projection sur E_1 parallélement à E_2 :

$$p_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_1 \\ u & \longmapsto & u_1 \end{array}$$

et de manière identique p_2 projection sur E_2 parallélement à E_1. On montre que $p_1 \circ p_1 = p_1$, $p_2 \circ p_2 = p_2$, $p_1 + p_2 = \text{id}_E$, $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ (application nulle de E dans E), enfin on montre que : $\forall (u,v) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, $p_1(u+v) = p_1(u) + p_1(v)$ et $p_1(\alpha.u) = \alpha.p_1(u)$
(on dit que p_1 est une application linéaire et il en est de même pour p_2).

Remarque 5. *Ne pas confondre la notion de supplémentaire avec celle de complémentaire : si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et si $x \notin E_1$, on ne peut pas en déduire que $x \in E_2$!*

► Exemple : : Soit $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x=y=z\}$. E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$ qui sont supplémentaires.

► Exemple : : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

qui sont supplémentaires.

► Exemple : : Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $A \in E \setminus \{0_E\}$. Soit $F = \{P \in E\ , deg(P) < deg(A)\}$. Montrer que F est un sev de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.