TD 21 : Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel

▶ Exercice 1 (réfce 2) : Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On définit une autre loi externe sur E par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in E,\ \lambda * x = \mathrm{Re}(\lambda).x$$

L'ensemble $(E, +, *)$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Sous-espace vectoriel engendré par une partie

▶ Exercice 2 (réfce 4) : Dans $\mathbb{R}^3$ on donne $u = (-12, -2, 5)$, $v = (2, -1, 4)$ et $w = (5, 0, 1)$.

a. L'un de ces vecteurs est-il combinaison linéaire des deux autres ?
b. Caractériser $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Vect}(v, w)$
c. Montrer que $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Vect}(v, w)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

▶ Exercice 3 (réfce 5) : Dans $\mathbb{R}^4$ on donne $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 5, 1)$ et $v_3 = (0, 3, 1)$ et $v_4 = (1, 2, 0)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$.

▶ Exercice 4 (réfce 6) : Soit A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.

Sous-espaces vectoriels

▶ Exercice 5 (réfce 8) : Soit $n > 1$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?

1. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$
2. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$
3. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$
4. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = x_2^2\}$
5. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 x_2 = 0\}$
6. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$

▶ Exercice 6 (réfce 9) : Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

1. l'ensemble des fonctions à valeurs positives ou nulles,
2. l'ensemble des fonctions nulles en 0,
3. l'ensemble des fonctions polynomiales de degré deux exactement,
4. l'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$,
5. l'ensemble des fonctions dérivables en 0.

▶ Exercice 7 : Montrer que $\{u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2=3u_{n+1}+2u_n}\}$ est un sev d'un $\mathbb{R}$-ev à déterminer.

▶ Exercice 8 (réfce 11b) : Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soient $F = \{u \in E \mid \lim_{n \to +\infty} u_n = 0\}$ et G est le sous-ensemble de E formé des suites constantes. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et qu'ils sont supplémentaires dans E.

Opérations dans les espaces vectoriels

► Exercice 9 (réfce 13) : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \subset H \Rightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap H$.

► Exercice 10 (réfce 14) : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

► Exercice 11 (réfce 16) : On pose $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$. Montrer que les ensembles F et G sont deux espaces vectoriels. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?