DM 10 cor - MP 81 le 3/4/24

Ex 1

① ⓐ F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient défini de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$

① ⓑ $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc F est prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0)=1$.

$\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \times x = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \times \lim_{x\to 0} x = \frac{1}{2}\times 0 = 0$.

Donc G est prolongeable par continuité en 0 en posant $G(0)=0$.

② ⓐ F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient défini de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x>0,\ F'(x) = \frac{\cos x \times x - \sin x}{x^2}$ et $G'(x) = \frac{\sin x \times x - (1-\cos x)}{x^2}$

② ⓑ • $F(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

Comme F est défini en 0 et que F admet un $DL_2(0)$, F admet un $DL_1(0)$ qui est : $F(x) = 1 + o(x)$ et donc F est dérivable en 0. On a $F'(0)=0$

• $G(x) = \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x} = \frac{1}{2}x + o(x)$

Comme G est défini en 0 et que G admet un $DL_1(0)$, G est dérivable en 0 et $G'(0) = \frac{1}{2}$.

③ ⓐ les solutions de l'équation $F(x)=0$ sont les solutions de l'équation $\sin x = 0$. Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin x = 0$ ssi $\exists k\in\mathbb{Z} /\ x = k\pi$.

Parmi ces solutions, celles qui appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$ s'écrivent $a_k = k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $a_{k+1} - a_k = (k+1)\pi - k\pi = \pi > 0$

Donc (a_k) est strictement croissante.

③ ⓑ Les solutions de l'équation $G(x)=0$ sont les de l'équation $1-\cos x = 0$ càd $1 = \cos x$. Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos x = 1$ ssi $\exists k\in\mathbb{Z} /\ x = 2k\pi$.

Parmi ces solutions, celles qui appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$ s'écrivent $b_k = 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $b_{k+1} - b_k = 2(k+1)\pi - 2k\pi = 2\pi > 0$

Donc (b_k) est strictement croissante.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $b_k = a_{2k}$ donc (b_k) est une suite extraite de (a_k).

④ ⓐ Soit $k\in\mathbb{N}^*$ F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]a_k, a_{k+1}[$ et F est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a_k, a_{k+1}]$ et $F(a_k) = F(a_{k+1})$ car

$F(a_k) = \frac{\sin(a_k)}{a_k} = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = \frac{0}{k\pi} = 0$ et $F(a_{k+1}) = \frac{\sin((k+1)\pi)}{(k+1)\pi} = 0$

Donc d'après le théorème de Rolle, $\exists x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tq $F'(x_k) = 0$

(4)(b) $\forall x>0,\quad F'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{h(x)}{x^2}$ et $x^2>0$

donc F' et h sont du même signe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(4)(c) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x>0 \quad h'(x)=\cos x - x\sin x-\cos x = -x\sin x$. <u>Soit $k\in\mathbb{N}^*$</u>

Si k est pair alors $\forall x\in]k\pi,(k+1)\pi[=]a_k,a_{k+1}[$, $\sin x>0$

donc $\forall x\in]a_k,a_{k+1}[$, $x\sin x>0$ et $h'(x)<0$

Si k est impair alors $\forall x\in]k\pi,(k+1)\pi[=]a_k,a_{k+1}[$, $\sin x<0$

donc $\forall x\in]a_k,a_{k+1}[$, $x\sin x<0$ et $h'(x)>0$

et h' s'annule en a_k et en a_{k+1} c'àd en des pts isolés dans les deux cas, et garde un signe constant sur $]a_k,a_{k+1}[$

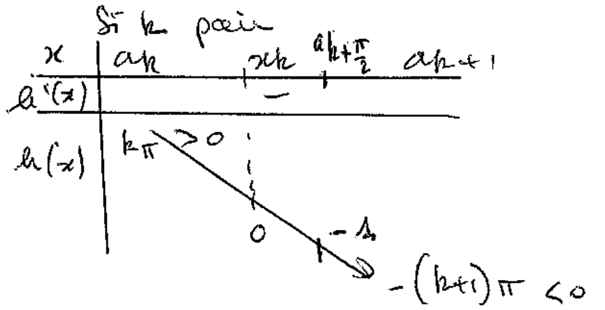
Donc dans les deux cas, h est strictement ~~monotone~~ monotone sur $[a_k,a_{k+1}]$

(4)(d) Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

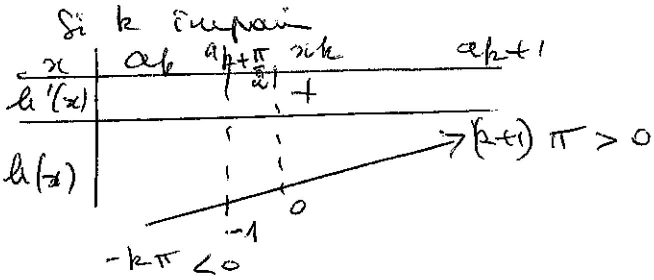
On sait d'après (4)(b) F' est du même signe que h

Déterminons le signe de h.

Si k pair



Si k impair



- h réalise une bijection de $]a_k,a_{k+1}[$ vers $]-(k+1)\pi,k\pi[$ si k est pair or $0\in]-(k+1)\pi,k\pi[$ donc $\exists!\, x_k\in]a_k,a_{k+1}[$ tq $h(x_k)=0$.

donc $\exists!\, x_k\in]a_k,a_{k+1}[$ tq $F'(x_k)=0$

- h réalise une bijection de $]a_k,a_{k+1}[$ vers $]-k\pi,(k+1)\pi[$ si k impair or $0\in]-k\pi,(k+1)\pi[$ donc $\exists!\, x_k\in]a_k,a_{k+1}[$ tq $h(x_k)=0$

donc $\exists!\, x_k\in]a_k,a_{k+1}[$ tq $F'(x_k)=0$.

(4)(e) Soit $k\in\mathbb{N}^*$ $F'\left(a_k+\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{h(a_k+\frac{\pi}{2})}{(a_k+\frac{\pi}{2})^2}$ est du signe de $h\left(a_k+\frac{\pi}{2}\right)$

or $h\left(a_k+\frac{\pi}{2}\right)=\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k+1}$

Donc si k pair, $h(a_k+\frac{\pi}{2})=-1<\underbrace{h(x_k)}_{=0}$ et h est st^t décroissante sur $]a_k,a_{k+1}[$

et si k impair, $h(a_k+\frac{\pi}{2})=1>h(x_k)=0$ et h st^t croissante sur $]a_k,a_{k+1}[$

donc si k pair, $a_k+\frac{\pi}{2}>x_k$ et $x_k>a_k$

si k impair, $a_k+\frac{\pi}{2}>x_k$ et $x_k>a_k$ $\Big\}$ dans les 2 cas, $x_k\in]a_k,a_k+\frac{\pi}{2}[$

(4)(f) $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $a_k=k\pi$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k=+\infty$. Par le th de minoration comme $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $a_k<x_k$ on en déduit que (x_k) DV vers $+\infty$.

TD 19.

ex 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soient $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}\ )^n$ Soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc par l'inégalité de Jensen :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \text{ ; en prenant } \forall i\ \lambda_i = \frac{1}{n}$$

$$\ln\left(1 + e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(1+e^{x_i})$$

$$\ln\left(1 + \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{x_i}{n}}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \ln\left((1+e^{x_i})^{\frac{1}{n}}\right) \quad \text{exp croiss sur } \mathbb{R}$$

$$1 + \prod_{i=1}^{n} (e^{x_i})^{\frac{1}{n}} \leq e^{\sum_{i=1}^{n} \ln((1+e^{x_i})^{\frac{1}{n}})} = \prod_{i=1}^{n} e^{\ln(1+e^{x_i})^{\frac{1}{n}}}$$

$$1 + \prod_{i=1}^{n} (y_i)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^{n} (1+y_i)^{\frac{1}{n}} \quad \text{en posant } \forall i\ y_i = e^{x_i}$$

ex 4 (1) Soit f une fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a donc que f est
On pose $J = f(\mathbb{R})$. Par le TVI, J est un intervalle ~~continue sur $\mathbb{R}$~~
f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers J. f^{-1} est continue et strictement décroissante sur J.

Soient $(x', y') \in J^2$. Soit $\alpha \in [0,1]$.

On pose $x = f^{-1}(x')$ et $y = f^{-1}(y')$.

$$f^{-1}(\alpha x' + (1-\alpha) y') = f^{-1}(\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y))$$

or f est convexe donc $\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geqslant f(\alpha x + (1-\alpha) y)$
et f^{-1} est décroissante donc $f^{-1}(\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)) \leqslant f^{-1}(f(\alpha x + (1-$

Ainsi $f^{-1}(\alpha x' + (1-\alpha) y') \leq \alpha x + (1-\alpha) y = \alpha f^{-1}(x') + (1-\alpha) f^{-1}(y')$
et f^{-1} est convexe sur J

Ex 10 TD 20

On applique la formule de Taylor-Young à ~~f~~ $f : x \mapsto \arctan(1+x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 0 car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2+1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = f(0) + \dfrac{x}{1!} f'(0) + o(x)$

$$\text{Arctan}(1+x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + o(x)$$

Ainsi $\quad \text{Arctan}(1+x) - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{x}{2} + o(x)$

$$\text{Arctan}(1+x) - \frac{\pi}{4} \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$$

Ex 11 TD 20

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\text{Arcsin} x} - \dfrac{1}{x}$ f est continue sur $[-1,1] \setminus \{0\}$

f est impaire

$\text{Arcsin}\, x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \underset{0}{o}(x^5)$

donc $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{3x^4}{40}+\underset{0}{o}(x^4)}\right) - \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{40} + \frac{x^4}{36} + \underset{0}{o}(x^4)\right) - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6} + x^4\left(\frac{-3}{40}+\frac{1}{36}\right) + \underset{0}{o}(x^4)\right)$$

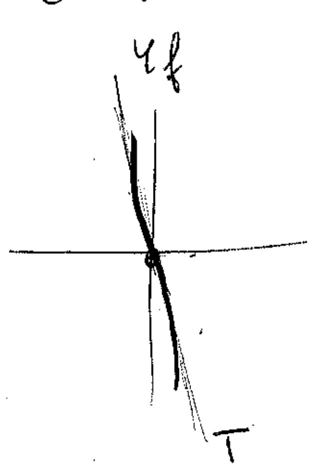
$$f(x) = -\frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + \underset{0}{o}(x^3) \quad \text{donc } f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x}{6}$$

Ainsi f possède un DL à l'ordre 3 en 0 donc f possède un DL à l'ordre 1 en 0 et si on pose $f(0)=0$ (car $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{6} = 0$) alors f est définie en 0 et l'on peut dire que f est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 est $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$.

De plus $f(x) - \left(-\dfrac{x}{6}\right) \sim \dfrac{-17x^3}{360}$

La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au pt d'abscisse 0 a pour équation $y = -\dfrac{x}{6}$ et elle est ~~au~~ dessus de $\mathcal{C}_f$ ~~à~~ droite de 0 $(x>0)$ et en dessous de $\mathcal{C}_f$ à gauche de 0 $(x<0)$

Le point 0 est donc un point d'inflexion.



TD 20

Ex 16 Étude de $f : x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

- f défini si $x+1 \neq 0$ et donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Étude aux bornes : $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que produit et composée de fcts dérivables.
Tableau de variation : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$f'(x) = 2x \operatorname{Arctan} \frac{1}{1+x} - x^2 \frac{1}{(1+x)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}$$

$$= 2x \operatorname{Arctan} \frac{1}{1+x} - \frac{x^2}{1+(1+x)^2}$$

$$= 2x \operatorname{Arctan} \frac{1}{1+x} - \frac{x^2}{2+2x+x^2} = x\,\varphi(x).$$

$$\varphi(x) = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2+2x+x^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{-2}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2} \times \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2+2x+x^2 - x(2x+2)}{(2+2x+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2}{2+2x+x^2} - \frac{2+\cancel{2x}+x^2-2x^2-\cancel{2x}}{(2+2x+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(2+2x+x^2) - 2 + x^2}{(2+2x+x^2)^2}$$

$$= \frac{-4-4x-2x^2-2+x^2}{(2+2x+x^2)^2} = \frac{-x^2-6-4x}{(2+2x+x^2)^2} < 0$$

x^2+4x+6

$\Delta = 16 - 4 \times 6 = -8$

$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 \Rightarrow$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
φ'		$-$	‖	$-$	
φ	0	$\searrow$	‖	$+ \searrow$	0

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En $\pm\infty$: on pose $t = \frac{1}{x}$ $\quad f(x) = \frac{1}{t^2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{t^2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{1+t}\right)$

TD20

Ex 16 suite

$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{1+t}\right)$

$\frac{t}{1+t} = t \times \frac{1}{1+t} = t \times \left(1 - t + t^2 + o(t^2)\right) = t - t^2 + t^3 + o(t^3)$

or $\operatorname{Arctan} u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ on pose $u = t - t^2 + t^3 + o(t^3)$

car si $t \to 0$, $u \to 0$

Ainsi $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\left[t - t^2 + t^3 - \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right]$

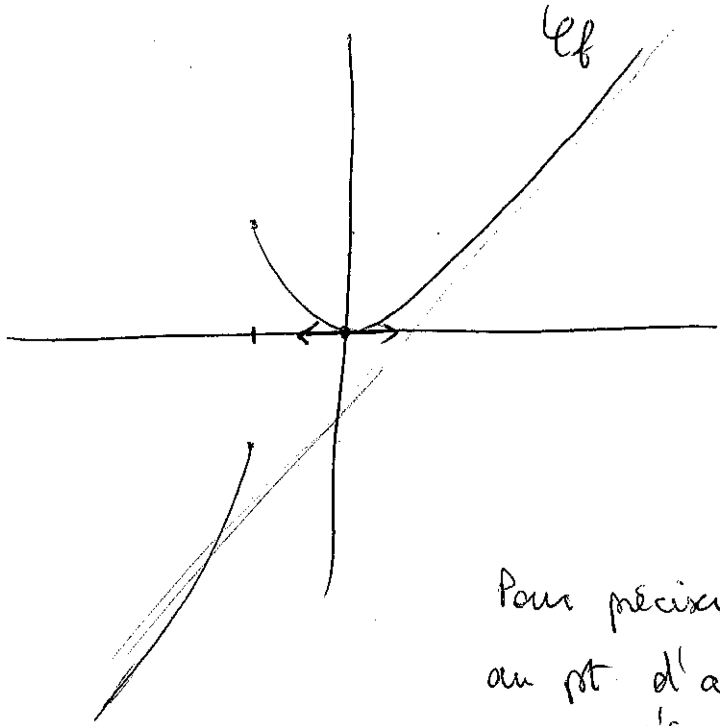
$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - 1 + \frac{2}{3} t + o(t)$

Ainsi $f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + \underset{\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x$

La droite d'éq $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote au vois de $+\infty$

et en dessous au voisinage de $-\infty$.



Pour préciser les demi-tangentes

au pt d'abscisse -1, on calcule

$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \pi - 1$ et $\lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\pi - 1$