Chapitre 22 : Intégration

Introduction

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f$ mesure algébriquement l'aire délimitée par le graphe Γ_f et les droites d'équation $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.
Lorsque f est en escalier, ce réel se calcule facilement (somme d'aires de rectangles). C'est la base de la construction de l'intégrale au sens de Riemann.

1 Continuité uniforme

Définition 1 (Continuité uniforme).

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ \left(|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon\right).$$

Exemple : fonctions lipschitziennes.
$f :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 1 (Théorème de Heine).

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

2 Intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b]$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

2.1 Fonction en escalier sur $[a, b]$

Définition 2 (Subdivision).

1. *On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille finie $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ telle que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *Le **pas de la subdivision** est la longueur maximale entre deux éléments successifs de σ : c'est le $max\{x_{i+1} - x_i,\ 0 \leq i \leq n - 1\} > 0$.*
3. *Soit σ' une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ' est plus fine que σ ssi $\sigma \subset \sigma'$ ssi on obtient σ' en ajoutant à σ des éléments.*

Définition 3 (Fonction en escalier).

On dit que $f\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ ssi il existe une subdivision $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in [\![0, n - 1]\!]$.

Remarque 1.

1. *f prend au plus $2n + 1$ valeurs distinctes.*
2. *f est bornée car elle prend un nombre fini de valeurs.*

3. *Dans la définition précédente, on dit que σ est adaptée à f ou associée à f.*
4. *Si σ' est une subdivision plus fine que σ alors σ' est encore associée à f.*
5. *Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors il existe une subdivision σ'' de $[a,b]$ plus fine que σ et plus fine que σ'.*

On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ et à valeurs réelles.

▶ Exemple : $x \longmapsto E(x)$ est en escalier sur tout segment de $\mathbb{R}$, tandis que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est en escalier sur aucun segment de $\mathbb{R}$. ($1_{\mathbb{Q}}$, définie sur $\mathbb{R}$, est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$: $1_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon).

Propriété 1.

$\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

$(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}),+,.)$ et $(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}),+,\times)$.

2.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 4 (Intégrale d'une fonction en escalier).

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_0,\cdots,x_n)$ une subdivision associée à f. Soit $\alpha_i = f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ avec $0 \le i \le n-1$.
On appelle intégrale de f sur le segment $[a,b]$ et on note $\int_{[a,b]} f$ le réel

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\alpha_i.$$

La définition de l'intégrale est indépendante du choix de la subdivision associée.

▶ Exemple : Calculer $\int_{[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]} f$ où f est la fonction partie entière.

Propriété 2 (Propriété liée à l'intervalle : relation de Chasles).

Si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ avec $a < b$ et si $c \in]a,b[$ alors f est en escalier sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

De plus par convention, si $a < b$, $\int_{[a,b]} f + \int_{[b,a]} f = \int_{[a,a]} f = 0$ donc $\int_{[a,b]} f = -\int_{[b,a]} f$.

Propriété 3 (Propriétés liées à l'ordre).

Si $f, g \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$,

1. ***Positivité de l'intégrale*** *: si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.*
2. ***Croissance de l'intégrale*** *: si $f \geq g$ sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.*
3. ***Inégalité de la valeur absolue*** *: $|f| \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ et $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.*

Propriété 4 (Linéarité de l'intégrale).

Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} f + g = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.
2. $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f = \lambda \int_{[a,b]} f$.

Autrement dit la fonction $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire.

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

3.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 5 (Fonction continue par morceaux).

Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$

1. *f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.*
2. *f est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction f_i définie et continue sur $[x_i, x_{i+1}]$. Cela signifie qu'elle admet une limite finie à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}.*

► Exemple : La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$.

On note $\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2. *Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et toute fonction continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

Propriété 5.

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.

Propriété 6.

$\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

$(\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R}), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{B}([a,b], \mathbb{R}), +, .)$ et $(\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R}), +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{B}([a,b], \mathbb{R}), +, \times)$.

Problème : comment définir $\int_{[a,b]} f$ lorsque f est continue par morceaux sur $[a,b]$? On veut trouver $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ tel que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$. Il faut que $\int_{[a,b]} \varphi_1 \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \varphi_2$ si l'on veut conserver les propriétés liées à l'ordre. L'idée est la suivante : trouver φ_1 et φ_2 telles que $\int_{[a,b]} g$ et $\int_{[a,b]} h$ se rapprochent l'une de l'autre, aussi près que possible.

Théorème 2 (Approximation des fonctions continues par morceaux).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$.
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \quad \varphi_1 \leqslant f \leqslant \varphi_2,$ *et* $|\varphi_1 - \varphi_2| \leqslant \varepsilon$ *sur* $[a,b]$.

On retient que l'on peut encadrer une fonction continue par morceaux d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier. Exemple de graphe de fonctions en escalier encadrant f à ϵ près.

3.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$. On note :
$\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \ ; \ \varphi \leqslant f\}$.
$\mathcal{E}^+(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \ ; \ f \leqslant \varphi\}$.
et on définit :

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$$

$$I^+(f) = \inf\left\{\int_{[a,b]} \varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$$

Théorème 3 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$.
On conserve les notations précédentes.
$I^-(f)$ et $I^+(f)$ existent et on a $I^-(f) = I^+(f)$.
On appelle intégrale de f sur le segment $[a,b]$ et on note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f$ le réel $I^-(f) = I^+(f)$.

Extension de la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ au cas où $b \leq a$.

Si f est en escalier sur $[a,b]$ alors elle est continue par morceaux et son intégrale en tant que fonction continue par morceaux égale sont intégrale en tant que fonction en escalier. En effet, soit $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$, $\forall \varphi_1 \in \mathcal{E}^-(f)$, $\int_{[a,b]} \varphi_1 \leqslant \int_{[a,b]} f$, donc $\int_{[a,b]} f$ est un majorant de $\{\int_{[a,b]} \varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$ et de plus, $\int_{[a,b]} f \in \{\int_{[a,b]} \varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$, donc $\sup\{\int_{[a,b]} \varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\} =$
$\max\{\int_{[a,b]} \varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\} = \int_{[a,b]} f$.

Propriété 7 (Propriété liée à l'intervalle : relation de Chasles).

Si $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$ avec $a < b$ et si $c \in]a,b[$ alors f est continue par morceaux sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Propriété 8 (Lemme).

Si $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *avec* $|f-\varphi| \leqslant \varepsilon$, *alors* $\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \varphi\right| \leqslant \varepsilon(b-a)$.

Ce lemme sert à montrer la propriété suivante :

Propriété 9 (Linéarité de l'intégrale).

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\int_{[a,b]} f+g = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.
2. $\int_{[a,b]} \lambda f = \lambda \int_{[a,b]} f$.

Autrement dit la fonction $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_{[a,b]} f$ *est une forme linéaire.*

Propriété 10 (Propriétés liées à l'ordre).

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$.

1. ***Positivité de l'intégrale*** *: si* $f \geq 0$ *sur* $[a,b]$, $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
2. ***Croissance de l'intégrale*** *: si* $f \geq g$ *sur* $[a,b]$, $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.
3. ***Inégalité de la valeur absolue*** *:* $|f| \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ *et* $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Propriété 11 (Cas des fonctions paires, des fonctions impaires).

Soit a *un réel strictement positif et* $f \in \mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{R})$.

— *Si la fonction* f *est paire alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)dx$.

— *Si la fonction* f *est impaire alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Propriété 12 (Invariance de l'intégrale par translation).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$.
On pose $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *;* $f_\alpha : x \longmapsto f(x-\alpha)$.
$f_\alpha \in \mathcal{CM}([a+\alpha, b+\alpha],\mathbb{R})$ *et on a*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha$$

Application : Si f est T-périodique, alors $\int_{[a,a+T]} f = \int_{[0,T]} f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

3.3 Valeur moyenne, inégalité de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, alors $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. Donc $\exists m, M \in \mathbb{R} \quad m \leqslant f \leqslant M$, et $m(b-a) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant M(b-a)$.

Définition 6.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, avec $a < b$. On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ le réel $\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$; on a donc

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leqslant M$$

Propriété 13 (Inégalité de la moyenne).

Si $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\left|\int_{[a,b]} f \times g\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$

En particulier, lorsque $g = 1$ on obtient :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \times (b-a).$$

4 Cas des fonctions continues sur $[a,b]$, avec $a < b$

Propriété 14.

*Une fonction **continue** et à valeurs positives sur un segment $[a,b]$ est nulle sur $[a,b]$ si et seulement si son intégrale est nulle sur $[a,b]$.*

Propriété 15 (Inégalité de Cauchy - Schwarz).

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\left[\int_{[a,b]} f \times g\right]^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \cdot \int_{[a,b]} g^2.$$

Il y a égalité ssi f et g sont proportionnelles sur $[a,b]$.

Remarque 3. *La fonction $(.,.)$: $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} fg$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, c'est-à-dire une forme bilinéaire, symétrique, définie positive. Voir chapitre ultérieur.*

▶ Méthode : L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut être très utile pour montrer une inégalité comportant une intégrale.

▶ Exemple : : Soit $f : t \longmapsto \frac{e^t}{t}$. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$

$$\left(\int_{[1,x]} f\right)^2 \leqslant \frac{e^{2x} - e^2}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

5 Sommes de Riemann

Définition 7 (Somme de Riemann).

Soit f une application continue sur $[a,b]$ et soit $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une subdivision de $[a,b]$. On désigne par ζ_i un élément de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$ et on note $\zeta = (\zeta_i)_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$.
On appelle somme de Riemann associée à f, σ et ζ le réel

$$S(f,\sigma,\zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\, f(\zeta_i)$$

Interprétation géométrique de la somme de Riemann $S(f,\sigma,\zeta)$: cette somme de Riemann est l'intégrale de la fonction en escalier φ définie par $\varphi(x) = f(\zeta_i)$ pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$ et $i \in \{0,\cdots,n-1\}$.
Pour une subdivision **uniforme** (on dit aussi régulière) de l'intervalle $[a,b]$ de **pas** $\dfrac{b-a}{n}$ en prenant $\zeta = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$, on obtient la somme de Riemann notée

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n})$$

. En prenant $\zeta = (x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, on obtient la somme de Riemann notée

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})$$

. En prenant $\zeta = \left(\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$, on obtient la somme de Riemann notée

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n})$$

.

Théorème 4 (Convergence d'une somme de Riemann).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_{[a,b]} f.$$

Ce résultat est admis. Les sommes de Riemann constituent donc des approximations de l'intégrale d'une fonction **continue** sur un segment. L'approximation d'une intégrale par l'une des sommes R_n, S_n ou T_n s'appelle **méthode des rectangles**. L'approximation par la somme $U_n = \dfrac{R_n + S_n}{2}$ s'appelle **méthode des trapèzes**.

Ce théorème permet de déterminer la limite d'une suite dont le terme général est de la forme $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})$ où f est une fonction **continue** sur $[a,b]$. Elle converge vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

► Exemple : Soit $(S_n)_n$ la suite de terme gééral $S_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2}$. Montrons que cette suite converge vers $\dfrac{1}{2}$.
Considérons l'application f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, en effectuant le changement d'indice $i = k - n$ avec $i \in \{0, ..., n-1\}$,

$$S_n = n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}).$$

On en déduite que S_n est la somme de Riemann associée à la fonction f pour une subdivision $\sigma = (\frac{i}{n})_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$.
D'après le théorème, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = [-\frac{1}{1+x}]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On en conclut que la suite de terme général S_n converge et que sa limite est $\dfrac{1}{2}$. Remarquons que la fonction f considérée n'est pas unique. On peut également faire intervenir pour le calcul l'application f définie sur $[1,2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Propriété 16 (Cas d'une fonction lipschitzienne).

> *Soit f une application λ-**lipschitzienne** sur $[a,b]$ (donc continue sur $[a,b]$), soit $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une subdivision de $[a,b]$, ζ_i un élément de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$ et $\zeta = (\zeta_i)_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$.*
> *Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\displaystyle\int_{[a,b]} f - S(f,\sigma,\zeta)| \leq \frac{\lambda(b-a)^2}{n}$.*

► Exemple : Si $f = \ln$ (fonction 1-lipschitzienne sur $[1,2]$ car de dérivée bornée par 1) alors $|\displaystyle\int_{[1,2]} f - Rn(f)| \leq \frac{1}{n}$.
Pour avoir une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale, il suffit de prendre $n = 100$. Si le pas tend vers 0, les sommes de Riemann d'une fonction lipschitzienne sont aussi proches que l'on veut de son intégrale.

6 Primitive et intégrale

6.1 Primitives

Définition 8.

> *Soient $f : I \to K$ et $F : I \to K$. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I.*

Propriété 17.

> *Soit $f : I \to K$ et F une primitive de f sur I.*
> *Soit $G : I \to K$.*
> *G est une primitive de f sur I ssi $\exists c \in \mathbb{R},\ G = F + c$ sur I.*
> *Autrement dit l'ensemble $\mathcal{P}$ des primitives de f sur I est le sous-espace affine de $\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ dirigé par le sous-espace vectoriel des applications constantes de I sur $\mathbb{K}$: $\mathcal{P} = \{G = F + \lambda\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

6.2 Lien entre primitives et intégrale de f

Théorème 5 (Théorème fondamental reliant intégration et dérivation).

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a,b]$.
Les primitives de f sur $[a,b]$ sont les fonctions G définies par $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$.
On note $\displaystyle\int f(t)dt = F+c$ où $F=\displaystyle\int_a^{\cdot} f(t)dt$.

Conséquence : toute fonction continue admet des primitives.

Propriété 18.

Plus précisément, $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

6.3 Calcul d'une intégrale

Propriété 19.

Soit $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $a,b\in I$.
Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a) = [F(t)]_a^b.$$

Propriété 20.

Soit $f\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a,x\in I$.

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x)-f(a).$$

7 Formule de Taylor

Théorème 6 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en un point a de I).

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Soit $a\in I$. $\forall x\in I$,

$$f(x) = \overbrace{f(a)+(x-a)f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}^{\text{partie principale } T_n(x)} + \overbrace{\int_a^x f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt}^{\text{reste intégral de lagrange } R_n(x)}.$$

Remarque 4.
— *Pour $n=0$ le résultat est déjà connu : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.*
— $T_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Démonstration : par récurrence avec une intégration par parties.

Théorème 7 (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Soit $(a,b)\in I^2$. Si M est un majorant de la fonction $|f^{(n=1)}|$ sur le segment $[min(a,b),max(a,b)]$, on a :

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \le \frac{|b-a|^{n+1}}{(n=1)!}M.$$

: cas particulier $n = 0$.

8 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 9.

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$

1. *f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.*
2. *f est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction f_i définie et continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.*

Propriété 21.

Une fonction à valeurs complexes est continue par morceaux ssi ses parties réelle et imaginaire sont continues par morceaux.

Définition 10 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes).

Lorsque $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\,\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Conséquence : la propriété de linéarité, la relation de Chasles, l'inégalité du module et l'inégalité de la moyenne sont étendues aux fonctions à valeurs complexes.