TD22 cor

Ex 11 (réf ce 14)

① G est la composée de 2 fonctions continues :

- u est continue sur I à valeurs dans $[a,b]$
- F est une primitive de f sur $[a,b]$. Elle est dérivable donc continue sur $[a,b]$

ainsi G est continue sur I

② Comme $F'=f$ sur $[a,b]$ et que f est continue sur $[a,b]$ alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.

G est la composée de 2 fonctions continues : u sur I et F sur $[a,b]$ et u est à valeurs dans $[a,b]$ donc G est dérivable sur I.

$\forall x \in I, \quad G'(x) = F'\circ u(x) \times u'(x) = F'(u(x)) \times u'(x) = f(u(x)) \times u'(x).$

③ Ici $u_1 : x \longmapsto x$, $u_2 : x \longmapsto x^2$, $f = \ln$

f est cont sur $[1,+\infty[$ et u_1 est dér sur $[1,+\infty[$ donc $G_1 : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ est dér sur $[1,+\infty[$. u_2 est dér sur $[1,+\infty[$ donc $G_2 : x \mapsto \int_1^{x^2} f(t)dt$

Soit $x \geq 1$ $\quad G_1'(x) = f\circ u_1(x) \times u_1'(x) = \ln(x) \times 1$

$G_2'(x) = f\circ u_2(x) \times u_2'(x) = \ln(x^2) \times 2x$

Ainsi G est dér sur $[1,+\infty[$ puisque $G = -G_1 + G_2$. En effet :

Soit $x \geq 1$ $\quad G(x) = \int_x^1 \ln t\,dt + \int_1^{x^2} \ln t\,dt$ par la relation de Chasles

$= \int_1^{x^2} \ln t\,dt - \int_1^x \ln t\,dt = G_2(x) - G_1(x).$

Ainsi $\forall x \geq 1$ $\quad G'(x) = 2x\ln(x^2) - \ln x$.

Vous pouvez essayer de faire l'ex 12 (réf ce 15) de ce TD en vous aidant de la méthode 4-8 du livre blanc et du modèle de l'ex 4-6 en plus de celui-ci