

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 : exercices d'application du cours

Les trois questions sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$ admet comme développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 : $-\frac{1}{6}x - \frac{17}{360}x^3 + o(x^3)$. En déduire que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ que l'on notera encore f . Préciser l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0. Quelles sont les positions relatives de cette tangente et de la courbe représentative de f ? On justifiera la réponse.
2. On admet que toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f est strictement croissante alors sa fonction réciproque est concave sur $f(\mathbb{R})$.
3. On note $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications numériques continues définies sur $[-1, 1]$. Soient $F = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}), f \text{ est constante}\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}), \int_{-1}^1 f(x)dx = 0\}$. Montrer que $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}), +, \cdot)$ et qu'ils sont supplémentaires.

Exercice 2 : étude de fonction

On rappelle que pour tout x réel, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Etudier la parité de f .
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
(b) Déterminer la limite de f en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left[\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right] \times \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{th}(X) < X$.
5. En déduire le tableau de variations de f .
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \mapsto \frac{\text{sh}(X)}{X}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où $a_0, \dots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, que l'on notera F . Prouver ensuite que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : matrices qui commutent avec leur transposée

Le but de cet exercice est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient la relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M$ (1)

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels.

On notera en particulier :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1)
2. Calculer A^2 . En déduire que pour tout, entier naturel non nul n , A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

4. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel α_n tel que $U^n = \alpha_n U$.

En déduire que toutes ses puissances U^n , $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1)

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

5. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.
En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a , b , c et d pour que M appartienne à E_2 . On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2
7. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun une base.
8. Etant données M et N deux matrices de E_2 a-t-on nécessairement $M \cdot N \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note S la matrice : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_3 .

1. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3 .
2. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on pourra pour cela écrire F sous la forme d'espace engendré par une partie) et que F est inclus dans E_3 .
3. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

Exercice 4 : comportement asymptotique d'une suite

Pour tous réel $x > 0$ et entier $n \geq 3$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln(x)$, où le symbole $\ln$ désigne le logarithme népérien. On rappelle que $\ln(2) > 0,5$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]1, 2[$. On appellera désormais a_n cette solution.
2. Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante [on pourra comparer $f_n(a_n)$ et $f_n(a_{n-1})$].
3. Montrer que cette suite (a_n) tend vers 1.
4. On pose : $\forall n \geq 3, a_n = 1 + \epsilon_n$. On cherche à mieux connaître le terme ϵ_n . Pour cela, on introduit Φ , la fonction telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $\Phi(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. Montrer que $\Phi(\epsilon_n) = \frac{1}{n}$.
5. Démontrer que Φ admet, en 0, un développement limité à tout ordre k et donner le développement limité de Φ à l'ordre 2 en 0.
6. Montrer que Φ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle à préciser. On note Φ^{-1} sa bijection réciproque. Montrer que Φ^{-1} admet un développement limité à tout ordre en 0 et donner le développement limité de Φ^{-1} à l'ordre 2 en 0.
7. En déduire le développement asymptotique de ϵ_n en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{n^2}$ puis montrer que $a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.