

Chapitre 23 : Applications linéaires

Introduction

Les applications linéaires sont les applications entre espaces vectoriels qui conservent l'addition et la loi externe. Elles se traduiront plus tard dans l'année en dimension finie par des matrices.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général) et E et F désignent deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1 Définition et exemples

Définition 1.

Une application f de E dans F est dite linéaire si et seulement si

- $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$,
- $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Remarque 1. Si f est linéaire de E dans F , on a :

1. $f(0_E) = 0_F$.

2. $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Propriété 1.

Une application f de E dans F est dite linéaire si et seulement si

$\forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$.

► Exemples :

- Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $x \mapsto kx$, où $k \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda \text{id}_E : x \mapsto \lambda x$ est une application linéaire de E dans E appelée homothétie de rapport λ .
- Une translation de vecteur u non nul n'est pas linéaire puisque $t_u(0_E) = u \neq 0_E$.
- La dérivation est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

- L'application de l'ensemble des suites convergentes vers $\mathbb{R}$, qui à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe sa limite, est linéaire.

2 Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

2.1 Cas général

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Rappel : $\mathcal{F}(E, F)$, ensemble des applications de E dans F , est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes :

$$\begin{aligned} f + g : E &\longrightarrow F \\ t &\longmapsto f(t) + g(t) \\ \text{et } \alpha.f : E &\longrightarrow F \\ t &\longmapsto \alpha f(t). \end{aligned}$$

Théorème 1.

$(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, F), +, \cdot)$.

Propriété 2.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors

1. $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$,
2. les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F, G) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \\ \text{et } \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ \varphi &\longmapsto g \circ \varphi. \end{aligned}$$

Définition 2 (Isomorphisme, ensembles isomorphes).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est bijective alors f est appelée isomorphisme de E sur F .
On dit que E et F sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F .

► Exemple : Si λ est un scalaire non nul, l'homothétie de rapport λ est un isomorphisme de E dans E .

Propriété 3.

Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

2.2 Cas où $F = E$

Définition 3 (Endomorphisme, automorphisme).

Une application linéaire f de E dans E est appelée endomorphisme de E . Si de plus f est bijective, on dit que f est un automorphisme de E .

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ($\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$).

► Exemples :

1. L'application identité sur E : id_E est un endomorphisme de E .
2. Si λ est un scalaire non nul, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E .
3. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, l'application suivante est un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (ax + by, cx + dy) \end{aligned}$$

4. La restriction de l'opérateur de dérivation à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Remarque 2. — si f est un endomorphisme de E , on note $f^0 = \text{id}_E$ et on définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $f^{n+1} = f^n \circ f$. Attention, ne pas confondre à cette occasion $f^2(x)$ et $(f(x))^2$.
 — Un endomorphisme f de E est dit nilpotent si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$ (application nulle sur E).

Propriété 4.

La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.
 La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Propriété 5.

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Définition 4 (Groupe linéaire d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E , muni de la composition, est un groupe appelé groupe linéaire de E .

On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

2.3 Cas où $F = \mathbb{K}$

Définition 5.

Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire sur E .

► Exemples :

— Pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, l'application suivante est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto ax + by \end{aligned}$$

— L'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$ où $I = [a, b]$

— Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

3 Image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Théorème 2.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E' un sous-espace vectoriel de E et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Alors l'image directe de E' par f , $f(E') = \{f(x) \mid x \in E'\}$, est un sous-espace vectoriel de F .

► Exemple : si E' est la droite vectorielle engendrée par u et si $f(u) \neq 0_F$, $f(E')$ est la droite vectorielle engendrée par $f(u)$. Plus généralement si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n$, $f(\text{Vect}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})) = \text{Vect}(\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\})$.

► Méthode : Si $y \in F$, on retiendra l'équivalence : $y \in f(E') \iff \exists x \in E', y = f(x)$.

Remarque 3 (Cas particuliers). 1. si $E' = \{0_E\}$ alors $f(E') = \{0_F\}$

2. si $E' = E$ alors $f(E') = f(E) = \text{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F .

$\text{Im}f = \{f(x) \mid x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelé image de f .

Propriété 6.

Soit f une application linéaire de E dans F . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective
2. $f(E) = F$
3. $\text{Im}f = F$.

4 Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Théorème 3.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, F' un sous-espace vectoriel de F et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Alors l'image réciproque de F' par f , $f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$, est un sous-espace vectoriel de E .

► Méthode : Si $x \in E$, on retiendra l'équivalence : $x \in f^{-1}(F') \iff f(x) \in F'$.

Remarque 4. — On peut définir $f^{-1}(F')$ même si f n'est pas bijective.

- Si $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = y$.
- Si f est une bijection de E sur F et si $F' \subset F$, l'image réciproque de F' par f est égale à l'image directe de F' par f^{-1} .

Remarque 5 (Cas particulier). 1. si $F' = F$ alors $f^{-1}(F') = f^{-1}(F) = E$.

2. Si $F' = \{0_F\}$ alors $f^{-1}(F') = f^{-1}(\{0_F\}) = \text{Ker}f$ est un sous-espace vectoriel de E .

$\text{Ker}f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de f .

Théorème 4.

Soit f une application linéaire de E dans F . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. $\text{Ker}f = \{0_E\}$
3. $\forall x \in E, f(x) = 0_F \implies x = 0_E$.

5 Endomorphismes particuliers

5.1 Projecteurs

Définition 6.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . L'application p de E dans E qui, à tout élément x de E , associe l'unique y de F tel que $x = y + z$, avec $z \in G$ est appelée projection sur F parallèlement à G ou projecteur.

Projection associée.

Propriété 7.

Etant donnés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E , la projection sur F parallèlement à G est linéaire. Son noyau est G et son image est F .

F est aussi l'ensemble des vecteurs invariants de la projection sur F parallèlement à G .

► Exemples :

- Dans le plan, projection sur D parallèlement à D' , où D et D' sont deux droites vectorielles distinctes.
- Dans $\mathbb{R}^3$, projection sur P parallèlement à D et projection sur D parallèlement à P , où P est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et D une droite vectorielle non contenue dans P .

Propriété 8.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

5.2 Symétries

Définition 7.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application s de E dans E telle que si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, $s(x) = y - z$.

Propriété 9.

- Une symétrie s est un automorphisme involutif, c'est-à-dire un automorphisme qui vérifie $s \circ s = \text{id}_E$.
- Réciproquement, tout endomorphisme involutif de E est une symétrie. Plus précisément, si s est un endomorphisme involutif, alors s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Pour la réciproque, poser $p = \frac{s + \text{id}_E}{2}$ et montrer que $p \circ p = p$.

► Exemple : la conjugaison sur $\mathbb{C}$ est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.