Chapitre 24 : Dimension des espaces vectoriels

Introduction

Dans ce chapitre on va exploiter encore autrement la notion de combinaison linéaire avec la caractérisation des familles libres (toute combinaison linéaire à résultat nul des vecteurs de $\mathcal{F}$ est triviale) et celle des familles génératrices $\mathcal{F}$ de E (tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$), ce qui nous amènera naturellement à la notion de base d'un espace vectoriel. Nous étudierons plus précisément le cas où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet au moins une base finie.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif. Dans la plupart des cas, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Familles de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.1 Famille génératrice

Définition 1 (Combinaison linéaire).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. w est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ ssi $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$ est le sous-espace engendré par les vecteurs de $\mathcal{F}$, $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Définition 2 (Famille génératrice).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E ; on dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E sur $\mathbb{K}$ ssi $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

ssi $\forall x \in E \quad \exists\, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$

▶ Exemples :

1. La famille $((1, 0, ...), (0, 1, 0, ...), ..., (0, .., 1))$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$
2. $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ [1].

Propriété 1.

Toute sur-famille d'une famille génératrice finie est encore génératrice (une sur-famille de $\mathcal{F}$ est obtenue en rajoutant à $\mathcal{F}$ des vecteurs).

Propriété 2.

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathcal{F}) = (f(x_1), ..., f(x_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$.

1. espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n

Remarque 1. *Si E possède une famille génératrice finie, alors E est dit de dimension finie.*

1. Si (x, y) est génératrice d'un sous-espace vectoriel F, alors $(x + y, x - y)$ est aussi génératrice de F
2. Il n'existe pas de famille génératrice **finie** dans $\mathbb{K}[X]$ [2]

1.2 Famille libre, famille liée

Définition 3 (Famille libre).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une famille libre de E sur $\mathbb{K}$ ou linéairement indépendante sur $\mathbb{K}$

ssi $\forall (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.$

► Exemple : si $E = \mathbb{R}^2$, $e_1(1, 0)$ et $e_2(0, 1)$, (e_1) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. (e_1, e_2) est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$ (on dit alors que c'est une base). $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ est toujours génératrice mais n'est plus une famille libre.

Définition 4 (Famille liée).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une famille liée de E sur $\mathbb{K}$ (on dit alors que les vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ sont linérairement dépendants).

ssi $\mathcal{F}$ n'est pas libre

ssi $\exists (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = 0$ *et* $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \neq (0, 0, \cdots, 0).$

► Exemples :

1. Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires.
2. Si (u, v, w) est libre sur $\mathbb{K}$, alors $(u, u + v, u + v + w)$ aussi.
3. La famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $(x \longmapsto xe^{\alpha x}, x \longmapsto e^{\alpha x})$, où α est un réel, est libre sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3.

Si une famille $\mathcal{F}$ est libre alors tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont distincts et aucun n'est nul.

Propriété 4.

1. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre (une sous-famille de $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ s'obtient en supprimant à $\mathcal{F}$ des vecteurs).*
2. *Toute sur-famille d'une famille liée est liée (une sur-famille de $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ s'obtient en ajoutant à $\mathcal{F}$ des vecteurs).*

Démonstration : les deux propositions sont équivalentes.

Propriété 5.

Soit $u \in E - \{0_E\}$, $\mathcal{F} = (u)$ est libre.

Propriété 6.

Si $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille libre de E, et si $\mathcal{F}' = (x_1, ..., x_n, x)$ est liée alors x est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

2. $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Propriété 7.

$\mathcal{F} = (x_1, ..., x_p)$ est liée sur $\mathbb{K}$ alors l'un au moins un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres.

La réciproque est vraie.

Remarque 2. *$(1, i)$ est une famille de $\mathbb{C}$ libre sur $\mathbb{R}$ mais liée sur $\mathbb{C}$.*

Propriété 8 (La dépendance linéaire est conservée par une application linéaire).

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n) \in E^n$.
Si $\mathcal{F}$ est liée alors $f(\mathcal{F}) = (f(x_1), ..., f(x_n))$ est liée.
Si $\mathcal{F}$ est libre et f injective alors $f(\mathcal{F})$ est libre.

1.3 Base

Définition 5 (Base).

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E est une base de E sur $\mathbb{K}$ ssi elle est génératrice de E et libre dans E sur $\mathbb{K}$.

▶ Exemples :

1. $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
2. (1) est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.
3. $((1, 0, ...), (0, 1, 0, ...), ..., (0, .., 1))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ c'est-à-dire que c'est sa base la plus naturelle.
4. $(1, X, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée aussi base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$
5. Soit $M = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$M = \sum_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} a_{ij}E_{ij} \text{ avec } E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$(E_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui a $n \times p$ éléments. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Propriété 9 (Coordonnées).

Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E alors $\forall x \in E \quad \exists!\, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \vdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ (matrice colonne) représente les coordonneés (ou composantes) de x dans la base $\mathcal{B}$.

▶ Exemple : Soit $z \in \mathbb{C}$. Les coordonnées de z dans la base $(1, i)$ sont $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$.

Propriété 10.

1. *$\mathcal{B}$ est une base de E ssi $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale de E (famille libre qui devient liée si on lui ajoute un vecteur).*
2. *$\mathcal{B}$ est une base de E ssi $\mathcal{B}$ est une famille génératrice minimale de E (famille génératrice qui n'est plus génératrice si on lui enlève un vecteur).*

Propriété 11.

Si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors pour tout $k \in [[1, n]]$, $Vect(e_1, \cdots, e_k)$ et $Vect(e_{k+1}, \cdots, e_n)$ sont en somme directe.

1.4 Bases et applications linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 12.

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E. Soit $u : \mathbb{K}^n \to E, \ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

1. *$u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E)$*
2. *u est injective si et seulement si $(x_1, ..., x_n)$ est libre*
3. *u est surjective si et seulement si $(x_1, ..., x_n)$ est génératrice de E*
4. *u est bijective si et seulement si $(x_1, ..., x_n)$ est une base de E*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une famille quelconque de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Propriété 13.

1. *$\exists! f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad f(e_i) = f_i$.*
2. *f est injective ssi $\mathcal{F}$ est une famille libre de F sur $\mathbb{K}$.*
3. *f est surjective ssi $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F sur $\mathbb{K}$.*
4. *f est bijective ssi $\mathcal{F} = f(\mathcal{B})$ est une base de F sur $\mathbb{K}$.*

Remarque 3.

1. *Le premier point signifie qu'une application linéaire f de E dans F est entièrement connue lorsque sont données les images des éléments d'une base de E par f.*
2. *Pour montrer qu'une application linéaire f est un isomorphisme, on peut montrer que l'image d'une base de E par f est une base de F.*

2 Dimension d'un espace vectoriel

2.1 Définition

Définition 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$. On dit que E est de dimension finie ssi il existe une famille finie $\mathcal{F} = (x_1, \cdots x_p) \in E^p$ $(p \in \mathbb{N})$ génératrice de E sur $\mathbb{K}$.
Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

► Exemples :

1. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie sur $\mathbb{R}$.

2.2 Théorème d'échange

Théorème 1.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathcal{G} = (x_1, ..., x_p) \in E^p$ une famille génératrice de E et $\mathcal{L} = (y_1, ..., y_r) \in E^r$ une famille libre de E.
On peut échanger dans $\mathcal{G}$ les vecteurs de $\mathcal{L}$ avec r vecteurs de $\mathcal{G}$ et obtenir une nouvelle famille $\mathcal{F}$ qui sera toujours génératrice de E.
Par conséquent $r \leqslant p$, ce qui siginfie que toute famille génératrice a un nombre de vecteurs supérieur ou égal au nombre de vecteurs de toute famille libre (et toute famille ayant un nombre de vecteurs strictement supérieur à celui d'une famille génératrice quelconque est liée).

Démonstration

Première étape : $\mathcal{G}$ est génératrice de E et $y_1 \in E$ donc $\exists \alpha_1 ..., \alpha_p \in \mathbb{K} \quad y_1 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k$. Comme la famille $\mathcal{L}$ est libre, $y_1 \neq 0$, donc l'un au moins des α_i est non nul. Quitte à changer l'ordre des x_i, on suppose que $\alpha_1 \neq 0$.

On a alors $x_1 = \frac{1}{\alpha_1}(y_1 - \sum_{k=2}^{p} \alpha_k x_k)$; donc x_1 est CL des vecteurs de la famille $\mathcal{G}_1 = (y_1, x_2, ..., x_p)$. or $\forall x \in E, \exists (\beta_1, \cdots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p$.

$x = \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1 + (\beta_2 - \beta_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}) x_2 + \cdots + (\beta_p - \beta_1 \frac{\alpha_p}{\alpha_1}) x_p$ donc $\mathcal{G}_1 = (y_1, x_2, ..., x_p)$ est encore génératrice.

Deuxième étape : $\exists \alpha_1 ..., \alpha_p \in \mathbb{K} \quad y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p$. Comme la famille $\mathcal{L}$ est libre l'un au moins des α_i avec $i \neq 1$ est non nul. En effet, si $\alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$ alors $\alpha_1 y_1 - y_2 = 0_E$ et (y_1, y_2) est liée. Or toute sous-famille d'une famille libre est libre, c'est impossible.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on suppose que $\alpha_2 \neq 0$.

On a alors $x_2 = \frac{1}{\alpha_2}(-\alpha_1 y_1 + y_2 - \sum_{k=3}^{p} \alpha_k x_k)$; donc x_2 est CL des vecteurs de la famille $\mathcal{G}_2 = (y_1, y_2, x_3, ..., x_p)$ et $\mathcal{G}_2 = (y_1, y_2, x_3, ..., x_p)$ est encore génératrice.

$k + 1^{eme}$ étape : Supposons que (après renumérotation éventuelle) la famille $\mathcal{G}_k = (y_1, ..., y_k, x_{k+1}, ..., x_p)$ soit génératrice de E, avec $k < \min(p, r)$, alors $\exists \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K} \quad y_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_j + \sum_{j=k+1}^{p} \alpha_j x_j$. Comme la famille $\mathcal{L}$ est libre l'un au moins des α_i avec $i \geq k+1$ est non nul. En effet, si $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_p = 0$ alors $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k - y_{k+1} = 0_E$ et $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ est liée. Or toute sous-famille d'une famille libre est libre, c'est impossible.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on suppose que $\alpha_{k+1} \neq 0$.Alors $x_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}(y_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_j - \sum_{j=k+2}^{p} \alpha_k x_k$, et donc $\mathcal{G}_{k+1}$ est encore génératrice de E.

Si $k = r$, $\mathcal{F}_r = (y_1, ..., y_r, x_{r+1}, ..., x_p)$ est génératrice de E.

Remarque : $x_{r+1}, ..., x_p$ sont des vecteurs de $\mathcal{G}$ éventuellement dans un ordre différent de l'ordre initial.

Si $r > p$, ce qui précède montre que $(y_1, ..., y_p)$ est génératrice, mais alors $y_{p+1} \in \text{Vect}(y_1, ..., y_p)$, ce qui contredit la liberté de $\mathcal{L}$, donc nécessairement $r \leqslant p$

▶ Exemple : $\left(1, 1 + X, X + X^2, ..., X^{n-1} + X^n, X^n + 1\right)$ est liée dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2.3 Existence d'une base

Théorème 2.

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$, il existe au moins une base.

Démonstration

Comme E est de dimension finie, il existe une famille $\mathcal{G} = (x_1, ..., x_p) \in E^p$ génératrice de E ; si $\mathcal{G}$ est libre dans E, alors elle forme une base de E et donc E admet $\mathcal{G}$ comme base finie.

Comme E est non réduit à $\{0_E\}$, il existe un vecteur de $\mathcal{G}$ qui est non nul. Quitte à changer l'ordre des x_i je suppose que $x_1 \neq 0_E$. $\mathcal{L}_1 = (x_1)$ est une famille libre de E. Soit $\mathcal{L}_1$ est génératrice de E et alors $\mathcal{L}_1$ est une base, soit $\mathcal{L}_1$ n'est pas génératrice de E auquel cas l'un des vecteurs $x_2, \cdots x_p$ n'est pas CL de x_1. Quitte à changer l'ordre de $x_2, \cdots, x_p$, supposons que c'est x_2. Alors $\mathcal{L}_2 = (x_1, x_2)$ est libre. Soit $\mathcal{L}_2$ est génératrice et c'est une base, soit $\mathcal{L}_2$ n'est pas génératrice et l'un des vecteurs $x_3, \cdots x_p$ n'est pas CL de x_1. Quitte à changer l'ordre de $x_3, \cdots, x_p$, supposons que c'est x_3. Alors $\mathcal{L}_3 = (x_1, x_2, x_3)$ est libre, etc... On construit ainsi une suite $\mathcal{L}_k$ de familles libres de k vecteurs de $\mathcal{G}$. On s'arrête soit quand $\mathcal{L}_k$ est génératrice et alors $\mathcal{L}_k$ est une base de E, soit quand $k = p$ et alors $\mathcal{G} = \mathcal{L}_p$ est libre et génératrice de E.

Dans tous les cas on a une base constituée de n vecteurs de $\mathcal{G}$ avec $1 \leq n \leq p$.

2.4 Dimension

Théorème 3 (Définition de la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$.
Toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments et ce nombre s'appelle dimension de E et se note $\dim E$.
Par convention si $E = \{0_E\}$, $\dim E = 0$.

Démonstration
Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Soit n_1 est le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et soit n_2 est le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}_2$. $\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice donc $n_1 \leq n_2$. $\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ est génératrice donc $n_2 \leq n_1$. Conclusion : $n_1 = n_2$.

Remarque 4. *Lorsque $\dim F = 1$, on dit que F est une droite vectorielle et lorsque $\dim F = 2$, on dit que F est un plan vectoriel.*

▶ Exemples :

1. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.
2. $\mathbb{C}$ est de dimension 1 comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel et 2 comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.
4. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
5. L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

Propriété 14.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Toute famille libre a au plus n éléments.*
   Toute famille génératrice a au moins n éléments.
2. *Réciproquement, toute famille libre de n vecteurs est une base.*
   Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

2.5 Théorème de la base incomplète

Théorème 4.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

Démonstration : soient $\mathcal{L} = (y_1, ..., y_r)$ une famille libre dans E et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
D'après le théorème d'échange, on peut échanger les vecteurs de $\mathcal{L}$ avec r vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une famille génératrice de E. $\mathcal{B}' = (y_1, \cdots, y_r, e'_{r+1}, \cdots, e'_n)$, où $e'_{r+1}, \cdots, e'_n$ sont des vecteurs de $\mathcal{B}$. Or $\mathcal{B}'$ a n vecteurs , c'est une base de E.
Deuxième point : Soit $\mathcal{G} = (x_1, \cdots, x_m)$ une famille génératrice de E ($m \geq n$). On peut extraire de $\mathcal{G}$ une base de E (théorème d'existence d'une base).

2.6 Espaces isomorphes

Propriété 15.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\dim E = \dim F$ si et seulement si E et F sont isomorphes.

Propriété 16.

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$

2.7 Espace vectoriel produit

▶ Exemple : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m (n et m non nuls). Montrer que l'espace vectoriel produit $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et que de plus
$\dim E \times F = \dim E + \dim F$.
En particulier, pour tout entier p, $\dim E^P = p \dim E$. ▶ Exemple : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

3 Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie

3.1 Sous-espace vectoriel

Propriété 17.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E.

1. *F est de dimension finie et $\dim F \leqslant n$*
2. *$\dim F = n$ si et seulement si $F = E$*

★ Exercice : Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\}$.

3.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires

Propriété 18.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
$\dim E = \dim (F + G) = \dim F + \dim G$.

Remarque 5.

1. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, comme $F \times G$ et $F + G$ ont même dimension, $F \times G$ et $F + G$ sont isomorphes.*
2. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $\dim G = \dim E - \dim F$.*
3. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E on obtient une base de E en réunissant (en concaténant) une base quelconque de F et une base quelconque de G.*

Théorème 5 (Formule de Grassmann).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

Propriété 19.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les 3 proposition suivantes sont équivalentes :

1. *F et G sont supplémentaires dans E.*
2. *$F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$*
3. *$F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$*

Théorème 6.

Si F est un sous-espace vectoriel de E ($\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, alors F admet au moins un sous-espace vectoriel supplémentaire dans E.

Remarque 6. *Si G et H sont deux supplémentaires de F dans E, alors ils ont même dimension, donc ils sont isomorphes.*

★ Exercice : Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 engendrés respectivement par $\{(0,1,-1),(0,1,1)\}$ et par $\{(0,1,2),(2,3,4)\}$. Trouver une base et la dimension de F_1, F_2, $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$.

3.3 Bases adaptées

Définition 7 (Base adaptée à un sous-espace vectoriel).

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. On note $p = dim(F)$.
Une base $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ est dite ***adaptée*** *à F si et seulement si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base de F.*

Définition 8 (Base adaptée à une somme directe).

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $p = dim(F)$ et $q = dim(G)$.
On suppose que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base de F, que la famille $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_q)$ est une base de G et que F et G sont en ***somme directe****.*
Alors $(e_1, \cdots, e_p, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_q)$ est une base de $F + G = F \oplus G$.

Pour déterminer une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$, il faut concaténer une base de F et une base de G.

4 Rang d'une application linéaire

4.1 Noyau et image d'une application linéaire

Théorème 7 (Théorème du rang).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in N^*$. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Si G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans E alors G est isomorphe à $\mathrm{Im} f$ (forme géométrique du théorème du rang)*
2. *Imf est un sous-espace vectoriel de dimension finie et $\dim Kerf + \dim Imf = \dim E$.*

★ Exercice Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x,y,z)) = (x', y', z')$ tel que $\left\{\begin{array}{c} x' = y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x \end{array}\right.$
Donner les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et déterminer des bases de $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

4.2 Rang d'une application linéaire

Définition 9.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si Imf est de dimension finie, alors on appelle rang de l'application linéaire f : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f$.
On dit que l'application linéaire est de rang fini.

Remarque 7.

Si E est de dimension finie alors rgf est fini et $rgf + \dim Kerf = \dim E$, donc $rg(f) \leq \dim E$.

Si F est de dimension finie alors Imf est un sous-espace vectoriel de F et donc le rang de f est fini et $rgf = \dim Imf \leq \dim F$.

Propriété 20.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
$\mathrm{rg}(f) \leq \inf(\dim E, \dim F)$.

▶ Exemple : Soit E de dimension finie et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Déterminer le rang de la projection p sur E_1 parallèlement à E_2.

Propriété 21.

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions non nulles n et p et si f est une application linéaire de E sur F, alors

— $\mathrm{rg}(f) = p$ *si et seulement si f est surjective,*
— $\mathrm{rg}(f) = n$ *si et seulement si f est injective,*
— $\mathrm{rg}(f) = p = n$ *si et seulement si f est bijective,*

4.3 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 8.

Soient deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies <u>telles que $\dim E = \dim F$</u> et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes

1. *f est bijective de E sur F,*
2. *f est injective de E sur F,*
3. *f est surjective de E sur F.*

Remarque 8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. f est bijective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est injective.*

Pour montrer qu'une application linéaire f de E sur F (espaces vectoriels de **dimension finie**) est un isomorphisme, on peut par exemple montrer que $\dim E = \dim F$ et $\ker f = \{0\}$

Propriété 22.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Si $\exists g \in \mathcal{L}(E) \quad f \circ g = \mathrm{Id}$, alors $f \in GL(E)$ et $g = f^{-1}$.*
2. *Si $\exists v \in \mathcal{L}(E) \quad g \circ f = \mathrm{Id}$, alors $f \in GL(E)$ et $g = f^{-1}$.*

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie inversible à gauche ou à droite est donc inversible.

4.4 Invariance du rang par composition avec un isomorphisme

Propriété 23 (Rang d'une composée).

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$; $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg} f$ *et* $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg} g$*, autrement dit* $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant min(\mathrm{rg} f, \mathrm{rg} g)$
2. *Si f est bijective alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg} g$.*
3. *Si g est bijective alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg} f$.*

Démonstration

1. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$ donc $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg} g$.
   Si $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)$ est une base de $\mathrm{Im} f$ alors $(v(\varepsilon_1), ..., v(\varepsilon_k))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} g \circ f$,. Ainsi $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \dim(\mathrm{Im} f) = \mathrm{rg} f$
2. $f$bijective $\Rightarrow g \circ f(E) = g(f(E)) = g(F) = \mathrm{Im} g$. Ainsi $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$
3. Si g est bijective alors sa restriction $\bar{g} : \mathrm{Im} f \to g(\mathrm{Im} f)$ est bijective. Ainsi $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} g \circ f$ sont isomorphes et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

4.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 10.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$:
$\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = \dim\left(\mathrm{Vect}\mathcal{F}\right)$.

Remarque 9.

1. *$rg\,(\mathcal{F}) \leq n$. De plus $rg\,(\mathcal{F}) = n$ ssi $\mathcal{F}$ est une base de $\mathrm{Vect}\mathcal{F}$ ssi $\mathcal{F}$ est libre.*
2. *Rapport entre rang d'une famille de vecteurs et rang d'une application linéaire.*
   Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et une base de E, $\mathcal{F} = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une famille génératrice de Imf.
   $rg(\mathcal{F}) = \dim(\,Vect(\mathcal{F})) = \dim(Imf) = rg(f)$.

► Exemple : Trouver le rang de la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, où $u_1 = (2, 3, -3, 4, 2)$, $u_2 = (3, 6, -2, 5, 9)$, $u_3 = (7, 18, -2, 7, 7)$ et $u_4 = (2, 4, -2, 3, 1)$.

Propriété 24 (Manipulations élémentaires).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

1. *On ne change pas le rang si on change l'ordre des vecteurs de $\mathcal{F}$.*
2. *$\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $(\alpha x_1, x_2, \cdots, x_n)$ a le même rang que $\mathcal{F}$.*
3. *$\forall \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$, $\left(x_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x_k, x_2, \cdots, x_n\right)$ a le même rang que $\mathcal{F}$.*

Propriété 25.

$(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0_E)$ a le même rang que $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

5 Cas d'une forme linéaire : caractérisation et équations d'un hyperplan

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Rappel : une forme linéaire sur E est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

Définition 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle hyperplan vectoriel de E le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur E.

H est un hyperplan (vectoriel) de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ssi $\exists \varphi \in \mathcal{L}\,(E, \mathbb{K}) - \left\{\tilde{0}\right\}$ telle que $H = \ker\varphi$.

Propriété 26 (Caractérisation d'un hyperplan).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de E. H est un hyperplan de E si et seulement si H est de dimension $n - 1$.

Remarque 10.

1. *En dimension 3 les hyperplans sont les plans vectoriels, d'où le nom en dimension quelconque. En dimension 2 les hyperplans sont les droites vectorielles.*
2. *Soit H un hyperplan de E, espace vectoriel de dimension finie n.*
   $\dim H = n - 1$. H possède un sous-espace vectoriel supplémentaire et ce supplémentaire est de dimension 1. H possède donc pour supplémentaire une droite vectorielle et réciproquement.

Soit $\mathcal{B} = (e_1..., e_n)$ une base de E et $x \in E$ de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors $x \in H$ si et seulement si $\varphi(x) = 0$, ssi $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, où $a_i = \varphi(e_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Définition 12 (Equations d'un hyperplan).

$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, *avec* $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$, *est une équation cartésienne de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{B}$..*

Réciproquement, dans une base $\mathcal{B}$, l'équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est celle de l'hyperplan H noyau de la forme linéaire non nulle définie sur $\mathcal{B}$ par $\varphi(e_i) = a_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Propriété 27 (Formes linéaires de même noyau).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Etant données deux formes linéaires non nulles définies sur E : f et g, telles que $\ker f = \ker g$, il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $f = \lambda g$.

Par conséquent, deux hyperplans d'équations respectives : $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$ dans une base de E sont égaux si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $(b_1, \ldots, b_n) = \lambda(a_1, \ldots, a_n)$, cad si leurs équations dans une même base sont proportionnelles.

Propriété 28 (Intersection d'hyperplans).

Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$.

Remarque 11. *Dans un système linéaire homogène à n équatios et p inconnues, chaque équation peut être vue comme une équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^p$. L'ensemble des solutions est l'intersection de n hyperplans. C'est un sev de dimension au moins $p - n$.*
Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Définition 13 (Formes linéaires coordonnées dans une base).

On appelle formes linéaires coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n les applications e_i^* définies par :

$$\forall i \in [[1, n]],\ e_i^*(e_i) = 1 et \forall j \in [[1, n]] \setminus \{j\},\ e_i^*(e_j) = 0$$

Propriété 29 (Base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$).

La famille $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Ainsi toute forme linéaire $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'écrit de manière unique $\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k^*$ avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Propriété 30 (Intersection d'hyperplans : réciproque).

Si E est un espace de dimension finie n, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Cette propriété est la réciproque de la propriété de même titre.