TD 23 : Applications linéaires

Applications linéaires

▶ Exercice 1 : Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de E ?

1. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u : f \mapsto 2f$,
2. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u : f \mapsto f \circ f$,
3. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u : f \mapsto f'$,
4. $E = \mathbb{R}^2$, $u : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

▶ Exercice 2 (réfce3) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit ϕ un endomorphisme de E tel que $\phi^2 = 0$.

1. Montrer l'inclusion : $\mathrm{Im}\phi \subset \ker\phi$.
2. Montrer que $\mathrm{id}_E + \phi$ est un automorphisme de E.

▶ Exercice 3 (réfce6) : Dans $\mathcal{L}(E)$, soient deux éléments ϕ et ψ tels que $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$. Montrer que ϕ est surjective et que ψ est injective.

▶ Exercice 4 (réfce7) : Soient a et b deux nombres complexes.

1. Montrer que l'ensemble F des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Montrer que l'application $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ appartient à $\mathcal{L}(F, \mathbb{C}^2)$.
3. Montrer que l'application f est un isomorphisme.
4. En déduire l'existence de deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace F telles que $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

Image et Noyau

▶ Exercice 5 (réfce8) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E. Comparer $\ker f$ et $\ker(g \circ f)$ et comparer $\mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Im}(g \circ f)$. Que peut-on en déduire pur les suites $(\ker f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im} f^n)_{n\in\mathbb{N}}$?

▶ Exercice 6 (réfce9) : Dans chacun des cas suivants, indiquer si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire et si oui préciser $\ker f$.

1. $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R},\ f((x, y)) = xy$,
2. $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R},\ f((x, y)) = x + y$,
3. $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R}^2,\ f((x, y)) = (x + y, x)$,
4. $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R}^2,\ f((x, y)) = (|x|, |y|)$,
5. $E = \{\text{fonctions polynômes réelles}\},\ F = \mathbb{R},\ f(P) = \deg(P)$,
6. $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(y) = y'' + 4y$,
7. $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(y) = y'^2 + 2y$.

▶ Exercice 7 (réfce10) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Un sous-espace vectoriel F est dit stable par g lorsque $g(F) \subset F$. Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont stables par g.

▶ Exercice 8 (réfce12) : Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $\ker(v \circ u) = \ker u$ si et seulement si $\mathrm{Im}u \cap \ker v = \{0_E\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}v$ si et seulement si $\mathrm{Im}u + \ker v = E$.

► Exercice 9 (réfce13) : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ pour lequel il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$. Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

► Exercice 10 (réfce14) : Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction ϕ définie sur E par : $\forall f \in E,\ \phi(f) = F$ où $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = xf(x)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer son noyau et son image.

► Exercice 12 (réfce16) : Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Etablir l'équivalence $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \ker g$.

Symétries et projecteurs

► Exercice 11 (réfce15) : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(F, E)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ deux applications telles que $u \circ v = \mathrm{id}_F$.

1. u et v sont-ils nécessairement bijectifs ?
2. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.
3. Donner l'image et le noyau de ce projecteur.

► Exercice 13 (réfce17) : Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f((x, y)) = (y, x)$.

1. Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^2$ et préciser ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer l'expression analytique de la projection associée.

► Exercice 14 (réfce18) : Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (4x - 6y, 2x - 3y)$. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. Préciser son image et son noyau.